 新世纪高等学校研究生教材

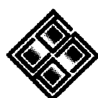
 北京市高等教育精品教材

数学学科硕士研究生基础课程系列教材

现代分析基础

北京师范大学数学科学学院　组编

丁　勇　编著


北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

现代分析基础/丁勇编著. - 北京：
北京师范大学出版社，2008.1
（新世纪高等学校研究生教材．北京市高等教育精品教材）
ISBN 978-7-303-09082-2

Ⅰ.现… Ⅱ.丁… Ⅲ.分析（数学）- 基础理论 - 研究生 - 教材 Ⅳ.O171
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 205843 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：涿州市星河印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm × 230 mm
印　　张：15.25
字　　数：260 千字
印　　数：1～3 000
版　　次：2008 年 1 月第 1 版
印　　次：2008 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：23.00 元

责任编辑：岳昌庆　　装帧设计：高　霞
责任校对：李　菡　　责任印制：马鸿麟

前 言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节，是研究生教学改革措施之一，也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据. 纵观我院的研究生教育，可分为几个阶段：1954~1960 年是我院研究生教育初创时期，招生为代数、分析、几何等方向的 10 个研究生班；1962~1965 年改为招收少量的硕士研究生；1966~1976 年“文化大革命”时期，研究生停止招生. 1978 年，我院恢复招收硕士研究生，研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外，主要学习几门专业课. 每年导师根据招生情况，分别制定每个研究生的培养计划. 从 1982 年开始，首次开展制定攻读硕士学位研究生培养方案的工作. 为拓宽研究生的知识面，对每届研究生开设 5 门专业基础理论课：泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形，每人至少选 3 门；从 1983 年起，增加代数拓扑，共 6 门基础理论课，安排有经验的教师讲课且相对固定，考试要求严格，使研究生受到正规的训练. 由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距，经过这个阶段的学习后，基本上达到了一个相同的水平，为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障. 在 1992 年修订教学计划时，增加了概率论基础和计算机基础. 这样，基础理论课共开设 8 门. 从 1997 学年开始，规定研究生每人至少选 4 门. 从 2000 年开始，改为开设 12 门基础课，增加应用分析基础、偏微分方程、李群、随机过程. 经过近 30 年系统的研究生培养工作，研究生教育正在逐步走向正规. 在此期间，学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的培养经验，将这些经验落实并贯彻到研究生教材编写中去是大有益处的.

随着研究生的扩招，招收研究生的数量越来越大. 再加上培养方案的改革，出版研究生系列教材已经提到议事日程上来. 在 20 世纪 90 年代，北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材：泛函分析、实分析、随机过程等，但未系统策划出版系列教材. 2005 年 5 月，由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京师范大学出版社理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，由北京师范大学数学科学学院组编 (李仲来教授负责)，准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版，进一步计划用几年时间，出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材. 我们希望

使用这些教材的校内外专家学者和广大读者，提出宝贵的修改意见，使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论 (数学) 硕士研究生使用和参考.

北京师范大学数学科学学院
2006-01-18

编者的话

"应用分析基础"是北京师范大学数学科学学院 2000 年硕士研究生培养方案中列入的学位基础课程之一. 在 2007 年 6 月由北师大研究生院组织的研究生培养方案的修订工作中, 根据一些专家教授的建议, 在原"应用分析基础"课程的内容中补充 20 世纪 70 年代以来在分析领域中取得的某些重要进展, 同时将该课程更名为"现代分析基础", 并仍列为北师大数学学院硕士研究生的学位基础课程.

2002 年以来, 编者为北师大数学学院的四届硕士研究生讲授了该门课程. 在教学中我们曾选用了 1999 年 Wolf 数学奖得主、美国科学院院士 E. M. Stein 和美国著名数学家 G. Weiss 的名著《Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces》([51]) 作为该课程的主要参考书. 本书是在编者的"应用分析基础"讲义之上, 参考了国内外一些重要专著和文献后修改补充编写而成的.

全书共分六章. 第一章中介绍的知识在现代分析中是最基本且十分重要的, 它们的应用也始终贯穿于全书之中. 第二章主要介绍 Fourier 变换的经典理论. Fourier 变换是现代分析中最重要的工具之一, 已广泛应用于偏微分方程、调和分析、复分析、概率论、小波分析及数值分析等众多研究领域. 第三章介绍速降函数空间 $\mathscr{S}$ 及其对偶空间 $\mathscr{S}'$ (缓增广义函数类). 运用缓增广义函数理论, 可十分有效地拓广经典的 Fourier 变换理论, 从而使得广义函数在现代分析, 特别是推动偏微分方程和调和分析理论的发展中发挥了极重要的作用. 第四章介绍 $\mathbb{R}^n$ 上调和函数的一般理论. 它来源于复分析并且密切联系着偏微分方程和调和分析理论, 同时在概率论中亦有重要的应用. 在这一章我们还讨论了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的上半空间 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上调和函数的径向和非切向边界值问题, 介绍了球面调和函数的基本内容和一些重要性质. 第五章介绍 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的基本知识. Calderón-Zygmund 奇异积分算子自 20 世纪 50 年代初创立以来便在现代调和分析中始终居于中心位置. 它一方面来源于 Cauchy 型积分理论, 另一方面来源于偏微分方程理论. 半个多世纪以来, 奇异积分算子理论已发展成为丰富而系统的理论体系. 1992 年 Wolf 数学奖和 2006 年 Abel 奖得主、国际数学家联盟前主席、瑞典皇家科学院院士 L. Carleson 说: Harmonic analysis has a position in mathematics comparable to that of the theory of the atom in physics. (调和分析在数学中的地位可与原子理论在物理学中的地位相比.) (见 Notices of AMS, **48** (2001), p. 482.) 而调和分析理论和方法也正是通过奇异积分及其相关算子

(如：极大算子、振荡积分、分数次积分、Littlewood-Paley 算子、交换子等）在 Lebesgue 空间等各类函数空间中的性质而在偏微分方程、复分析、小波分析等研究领域中发挥着重要作用. 在最后一章我们介绍了小波分析中的部分内容. 二十多年来，小波分析在理论和应用方面均得以迅速发展，现已被广泛应用于数值分析、信号处理、图像处理、语音识别、地震和石油勘探等领域. 在这一章我们仅介绍小波分析中最基本的理论和知识，如基本小波，小波变换，小波框架，多尺度分析，正交小波等，同时也可看到前面的知识在小波分析中的运用.

本书在内容选取中注重现代分析中基本思想、基本理论和基本方法的讲解，同时也注意介绍某些研究前沿问题和最新研究进展. 根据本人以往教学和科研的体会，我们在本书中给出了若干注记. 它们或对有关结论作进一步阐明、或指出运用结论中应注意的问题、或给出与结论相关联的背景知识和最新研究进展、或提出某些目前尚未解决的重要问题等. 目录中带 * 号的内容供有兴趣的读者阅读. 凡已具备“实变函数”“复变函数”及“泛函分析”等课程知识的读者，学习本课程应当没有问题.

本课程是北京师范大学研究生院 2005~2006 年建设的硕士研究生精品课程之一. 本书是北京师范大学数学科学学院 2005~2008 年建设的硕士研究生基础课程系列教材之一. 最近本书也被北京市教委列为 2007 年北京市高等教育精品教材建设立项项目. 编者非常感谢北京师范大学研究生院和数学科学学院在本课程讲授和本书编写过程中所给予的支持. 北京师范大学陆善镇教授对本书的编写思想提出了十分重要的指导性意见，美国 Auburn 大学韩永生教授与编者就书中某些内容有过深入的讨论，北京大学刘和平教授给出了很好的建议，编者在此向他们表示最诚挚的谢意. 此外，编者也十分感谢北京师范大学出版社为本书的编辑出版所做的大量工作.

限于本人学识水平，本书中难免存在错误和不妥之处，恳请专家和读者不吝赐教指正.

编者　(dingy@bnu.edu.cn)

2007 年 12 月

本书中主要函数空间的定义和相关记号

$\mathbb{R}^n$ 记 n 维欧氏空间. 对 $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \cdot y = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ 记 x 与 y 的内积, $|x| = (x \cdot x)^{1/2}$ 记 x 的模. 对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ 记 $\mathbb{R}^n$ 上的 Lebesgue 空间, 其定义为:

$$L^p(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}, \qquad 1 \leqslant p < \infty$$

及

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \|f\|_\infty = \inf_{\substack{|E|=0 \\ E \subset \mathbb{R}^n}} \Big(\sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus E} |f(x)| \Big) < \infty \right\},$$

其中 $E \subset \mathbb{R}^n$ 为 Lebesgue 可测集（以下简称可测集）, $|E|$ 记 E 的 Lebesgue 测度. $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p < \infty)$ 表示在 $\mathbb{R}^n$ 的任何紧集上 p 次可积函数的全体, 称 $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 中的 f 为 p 次局部可积函数.

对 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 数 p' 记 p 的共轭指数, 即满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

下面给出连续函数空间及其子空间的定义. $\mathbb{R}^n$ 上连续函数的全体记为 $C(\mathbb{R}^n)$.

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{ f : f \in C(\mathbb{R}^n)\,\text{且} \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \}.$$

记 $\mathbb{Z}_+$ 为全体非负整数. $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \cdots \times \mathbb{Z}_+$ 为 n 个 $\mathbb{Z}_+$ 的直积. $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ 称为多重指标. $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 称为 α 的阶. $|\alpha|$ 阶的微分算子 D^α 定义为:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

对 $m \in \mathbb{Z}_+$, 记

$$C^m(\mathbb{R}^n) = \{ f : D^\alpha f \in C(\mathbb{R}^n), \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, |\alpha| \leqslant m \}.$$

简记 $C^0(\mathbb{R}^n) = C(\mathbb{R}^n)$. 称 $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$ 为 f 的支集. 如果 $\operatorname{supp}(f)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, 则说 f 具有紧支集. 对 $m \in \mathbb{Z}_+$, 记

$$C_c^m(\mathbb{R}^n) = \{ f : f \in C^m(\mathbb{R}^n)\,\text{且具有紧支集} \}.$$

简记 $C_c^0(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上具有紧支集的连续函数的全体. 此外, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 表示无穷阶可微函数的全体, 而

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f : f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,\text{且具有紧支集} \}.$$

目 录

第一章 基本知识 1

§1.1 卷积 1

§1.2 Hardy-Littlewood 极大函数 3

§1.2.1 极大算子 M 的弱 (1,1) 型和 (p,p) 型 3

§1.2.2 算子族的点态收敛与 Lebesgue 微分定理 10

§1.2.3 算子族的收敛性在遍历理论中的应用 * 15

§1.3 恒等逼近 22

§1.3.1 恒等逼近算子的收敛 22

§1.3.2 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分 25

§1.4 算子内插定理 31

§1.4.1 Marcinkiewicz 算子内插定理 31

§1.4.2 Riesz–Thörin 算子内插定理 31

§1.4.3 算子内插定理的几个常用推广 * 35

习题一 36

第二章 FOURIER 变换 37

§2.1 Fourier 变换的 L^1 理论 37

§2.1.1 Fourier 变换的基本性质 37

§2.1.2 Fourier 积分的平均与 Fourier 变换的反演 42

§2.2 Fourier 变换的 L^2 理论 47

§2.2.1 Plancherel 定理 47

§2.2.2 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中 Fourier 变换的不变子空间 52

§2.3 Poisson-Stieltjies 积分和 Fourier-Stieltjies 变换 55

§2.4 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换的进一步讨论 * 59

§2.4.1 Heisenberg 不等式 59

§2.4.2 Hermite 算子和 Fourier 变换 61

习题二 65

第三章 SCHWARTZ 函数和缓增广义函数 66
§3.1 Schwartz 函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 66
§3.1.1 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质 66
§3.1.2 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换 70
§3.2 缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 72
§3.2.1 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质 72
§3.2.2 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的运算 74
§3.3 与平移可交换算子的刻画 79
习题三 87

第四章 调和函数 88
§4.1 $\mathbb{R}^n$ 上的调和函数的基本性质 88
§4.1.1 均值定理和最大值原理 88
§4.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中球内 Dirichlet 问题的解及其应用 97
§4.2 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上调和函数的边界值 103
§4.2.1 边值为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的调和函数特征 103
§4.2.2 调和函数的非切向极限 108
§4.3 球面调和函数 115
§4.3.1 球面调和函数的性质 115
§4.3.2 k 阶带调和函数 120
§4.3.3 Laplace-Beltrami 算子的谱 * 127
§4.4 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换的不变子空间 * 129
习题四 139

第五章 奇异积分算子 140
§5.1 Hilbert 变换 140
§5.1.1 $\mathbb{R}$ 上 Cauchy 型积分的边界值 140
§5.1.2 Hilbert 变换的 L^2 理论 143
§5.1.3 Calderón-Zygmund 分解 147
§5.1.4 Hilbert 变换的 L^p 理论 149
§5.2 Riesz 变换 156
§5.2.1 Riesz 变换的 L^2 理论 156

§5.2.2 旋转方法和 Riesz 变换的 L^p 理论 161
§5.2.3 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上共轭调和函数系的 Riesz 变换特征 165
§5.2.4 $\mathbb{R}^n$ 上的实 Hardy 空间及 BMO 空间介绍 * 168
§5.3 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 169
§5.3.1 奇异积分算子的 L^2 有界性的特征 171
§5.3.2 经典 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 175
§5.3.3 齐型核奇异积分算子及其极大算子 183
§5.3.4 具非光滑核的奇异积分算子的 L^p 有界性 * 190
习题五 193

第六章 小波分析初步 194
§6.1 基本小波与小波变换 194
§6.1.1 基本小波 194
§6.1.2 连续小波变换 195
§6.1.3 离散小波变换及小波框架 198
§6.2 Haar 小波的展开与收敛 201
§6.2.1 Haar 函数系和 Haar 级数 202
§6.2.2 二进投影算子族和 Haar 级数的收敛 203
§6.3 多尺度分析与正交小波 206
§6.3.1 正交系和 Riesz 系 206
§6.3.2 多尺度分析和尺度函数 211
§6.3.3 多尺度分析生成的正交小波 215
§6.3.4 正交小波的例子 221

参考文献 **225**

索 引 **228**

第一章　基本知识

§1.1　卷积

定义 1.1.1　设 f,g 为 $\mathbb{R}^n$ 上的两个可测函数，如果对 a.e.[1] $x\in\mathbb{R}^n$，积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt$$

存在，那么称其为 f 与 g 的卷积，记为 $f*g$. 即

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt, \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

由卷积的定义立即可得到下面的

命题 1.1.1　对于任意的 $f,g,h\in L^1(\mathbb{R}^n)$，卷积运算满足以下性质:

(a) $f*g=g*f$;　　(可交换性)

(b) $(f*g)*h=f*(g*h)$;　　(可结合性)

(c) $(\alpha f+\beta g)*h=\alpha(f*h)+\beta(g*h)$,　$\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{C}$;　　(线性)

(d) $\|f*g\|_1\leqslant\|f\|_1\|g\|_1$.　　(连续性)

证明　略.

[注 1.1.1]　命题 1.1.1 表明，如视卷积为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的乘法运算，那么 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 是 $\mathbb{C}$ 上的交换 Banach 代数 (加法为通常的函数加法).

命题 1.1.1(d) 是下面结论的特殊情形.

定理 1.1.2 (Young 不等式)　设 $1\leqslant p,q,r\leqslant\infty$ 满足 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}+1$. 若 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $g\in L^q(\mathbb{R}^n)$，则 $f*g\in L^r(\mathbb{R}^n)$，且

$$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q. \tag{1.1.1}$$

证明　首先设 $1\leqslant q<\infty$. 注意到

$$\frac{1}{q'}+\frac{1}{p'}+\frac{1}{r}=1,\quad \frac{p}{r}+\frac{p}{q'}=1,\quad \frac{q}{r}+\frac{q}{p'}=1.$$

---

[1] 本书中 "a.e." 表示几乎处处 (almost everywhere) 或 (对于) 几乎每个 (for almost every).

对 q', r, p' 应用 Hölder 不等式得到

$$\begin{aligned}|(f*g)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{p/q'}(|f(y)|^{p/r}|g(x-y)|^{q/r})|g(x-y)|^{q/p'}dy \\ &\leqslant \|f\|_p^{p/q'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|g(x-y)|^q dy\right)^{1/p'} \\ &= \|f\|_p^{p/q'}\|g\|_q^{q/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dy\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

由上式并应用 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\|f*g\|_r &\leqslant \|f\|_p^{p/q'}\|g\|_q^{q/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|^p|g(x-y)|^q dxdy\right)^{1/r} \\ &= \|f\|_p^{p/q'}\|g\|_q^{q/p'}\|f\|_p^{p/r}\|g\|_q^{q/r} \\ &= \|f\|_p\|g\|_q.\end{aligned}$$

如 $q=\infty$, 则必有 $p=1$ 且 $r=\infty$, 此时 (1.1.1) 显然成立. □

[注 1.1.2] Young 不等式表明, 如 p, q, r 满足定理 1.1.2 中的关系, 那么对取定的 $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, 卷积是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^r(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子.

例 1.1.1 记 $I=[0,1]\subset\mathbb{R}$, χ_I 为 I 的特征函数.[2] 那么容易验证,

$$(\chi_I * \chi_I)(x) = \begin{cases} x, & x\in[0,1], \\ 2-x, & x\in(1,2], \\ 0, & x\notin[0,2]. \end{cases}$$

上面的例子启示我们, 通过卷积运算可以改善函数的连续性.

命题 1.1.3 卷积运算满足以下性质:

(a) 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f*g$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续的有界函数;

(b) $\mathrm{supp}(f*g)\subset\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)$;

(c) 设 $1<p<\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f*g\in C_0(\mathbb{R}^n)$;

(d) 设 $f\in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g\in C_c^m(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f*g\in C^m(\mathbb{R}^n)$, 且对 $|\alpha|\leqslant m$,

$$D^\alpha(f*g)(x)=(f*D^\alpha g)(x).$$

[2]本书中 χ_E 表示集合 E 的特征函数, 即: 如 $x\in E$, 那么 $\chi_E(x)=1$, 否则 $\chi_E(x)=0$.

证明 留作习题.

由命题 1.1.3 立即可得

推论 1.1.4

(a) 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 那么 $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(b) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\operatorname{supp}(f)$ 为紧集. 那么当 $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 时, $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

现运用推论 1.1.4 给出局部紧 Hausdorff 空间上 Urysohn 引理在 $\mathbb{R}^n$ 上形式的直接证明.

定理 1.1.5 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集, 而 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, 且 $K \subset U$. 则存在 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, 且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \notin U. \end{cases}$$

证明 记

$$\eta = \begin{cases} \inf\left\{|x-y| : x \in K \text{ 且 } y \notin U\right\}, & U \neq \mathbb{R}^n, \\ 1, & U = \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

则 $\eta > 0$. 令 $V = \bigcup_{y \in K}\{x : |x-y| < \frac{\eta}{2}\}$. 显然有 $K \subset V$ 且 $\overline{V} \subset U$. 现取 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\operatorname{supp}(\psi) \subset \{x : |x| < \frac{\eta}{2}\}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$ (ψ 的存在性见本章习题 3). 由推论 1.1.4 知 $f = \psi * \chi_V$ 即为所求. □

§1.2 Hardy-Littlewood 极大函数

§1.2.1 极大算子 M 的弱 (1,1) 型和 (p,p) 型

定义 1.2.1 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 那么 f 的中心 Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 定义为:

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|dt, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.2.1}$$

这里 (及以后) $B(x,r)$ 为以 x 为中心, r 为半径的开球, 即 $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, (简记 $B(0,r)$ 为 $B(r)$).

中心 Hardy-Littlewood 极大函数的另一个定义方式是

$$\bar{M}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)}|f(t)|dt. \tag{1.2.2}$$

这里 (及以后) 记 $Q(x,r)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心, 边长为 r, 且边与坐标轴平行的方体.

定义 1.2.2 设 $f\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$. 那么 f 的非中心 Hardy-Littlewood 极大函数 $\tilde{M}f$ 定义为:

$$\tilde{M}f(x)=\sup_{Q\ni x}\frac{1}{|Q|}\int_{Q}|f(t)|dt,\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.2.3}$$

其中上确界取自 $\mathbb{R}^n$ 中一切包含 x, 边与坐标轴平行的方体.

[注 1.2.1] 极大函数 Mf 也可以通过卷积来表现. 事实上, 如记 v_n 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球 $B(1)$ 的测度, 那么 $Mf(x)=\sup\limits_{r>0}(|f|*\varphi_r)(x)$, 这里 $\varphi(t)=\frac{1}{v_n}\chi_{B(1)}(t)$, 而 $\varphi_r(t)=\frac{1}{r^n}\varphi(\frac{t}{r})$.

命题 1.2.1 (Hardy-Littlewood 极大函数定义的等价性) 设 $f\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 那么存在仅与 n 有关的常数 A,B, 使得对一切 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$Mf(x)\leqslant A\bar{M}f(x)\leqslant A\tilde{M}f(x)\leqslant BMf(x). \tag{1.2.4}$$

证明 留作习题.

由命题 1.2.1, 对于 $f\in L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$, 如无特别说明, 此后将统称 $Mf,\bar{M}f$ 以及 $\tilde{M}f$ 为 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数, 并依据问题的需要可选用不同的定义方式.

命题 1.2.2 (Hardy-Littlewood 极大函数的下半连续性) $L_{\rm loc}(\mathbb{R}^n)$ 中任意函数 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 在 $\mathbb{R}^n$ 中是下半连续的.

证明 由下半连续的定义, 需要证明: 对任意的 $\lambda>0$, 集合

$$E=\{x\in\mathbb{R}^n: Mf(x)>\lambda\}$$

为开集. 等价地, 只需说明 $E^c=\{x\in\mathbb{R}^n: Mf(x)\leqslant\lambda\}$[3] 为闭集. 设 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset E^c$ 满足 $x_k\to x\quad(k\to\infty)$. 由 (1.2.1), 仅需说明对任意的 $r>0$

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(t)|dt\leqslant\lambda. \tag{1.2.5}$$

[3] 如无特别说明, 此后 E^c 总表示集合 E 关于 $\mathbb{R}^n$ 的补集.

简记 $B_k = B(x_k, r)$ 且 $f_k(t) = f(t)\chi_{B(x,r)\triangle B_k}(t)$, [4] $k = 1, 2, \cdots$. 因此对一切 k 均有,

$$|f_k(t)| \leqslant |f(t)| \qquad \text{且} \quad \lim_{k\to\infty} f_k(t) = 0.$$

应用 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f_k(t)|dt = 0. \tag{1.2.6}$$

另一方面

$$\frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B_k} |f(t)|dt = \frac{1}{|B_k|} \int_{B_k} |f(t)|dt \leqslant \lambda.$$

因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(t)|dt &\leqslant \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)\setminus B_k} |f(t)|dt \\ &\quad + \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B_k} |f(t)|dt \\ &\leqslant \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f_k(t)|dt + \lambda. \end{aligned}$$

令 $k \to \infty$, 由 (1.2.6) 得 (1.2.5). □

定义 1.2.3 由 (1.2.1), (1.2.2) 及 (1.2.3) 所定义的, 作用于 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 上的算子统称为 Hardy-Littlewood 极大算子, 记为 M.

很清楚, M 是 $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 上的次线性算子, 即对任意的 $f, g \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$M(f+g)(x) \leqslant Mf(x) + Mg(x), \qquad M(\lambda f)(x) = |\lambda| Mf(x). \tag{1.2.7}$$

在给出下面极大算子 M 的其他性质之前, 先介绍两个概念.

定义 1.2.4 算子 $T: L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, 称为 (p,q) 型算子 (或是 (p,q) 有界的), 如它满足不等式

$$\|T(f)\|_q \leqslant C\|f\|_p,$$

其中, 常数 C 与 f 无关. 满足上述不等式的最小常数 C 称为 T 的 (p,q) 范数, 记作 $\|T\|_{(p,q)}$.

[4]本书中 $E\triangle F$ 记集合 E 和 F 的对称差, 其定义为: $E\triangle F = (E\setminus F)\cup(F\setminus E)$.

定义 1.2.5 设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. 那么映 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数空间 $\mathscr{F}$ 的算子 T 称为弱 (p,q) 型算子 (或是弱 (p,q) 有界的), 如果

(i) $\sup\limits_{\alpha>0} \alpha\big[|\{x \in \mathbb{R}^n: \ |T(f)(x)| > \alpha\}|\big]^{\frac{1}{q}} \leqslant C\|f\|_p, \quad 1 \leqslant q < \infty;$

(ii) $\|T(f)\|_q \leqslant C\|f\|_p, \quad q = \infty.$

上面常数 C 与 f 无关. 把满足上述不等式的最小常数 C 叫做 T 的弱 (p,q) 范数, 并记作 $\|T\|_{w(p,q)}$. 显然, T 为弱 (p,∞) 型算子等价于 T 为 (p,∞) 型算子. 另外, 由不等式

$$\begin{aligned}\alpha^q\big[|\{x \in \mathbb{R}^n: \ |T(f)(x)| > \alpha\}|\big] &\leqslant \int_{\{x\in\mathbb{R}^n: \ |T(f)(x)|>\alpha\}} |T(f)(x)|^q\,dx \\ &\leqslant \|T(f)\|_q^q\end{aligned}$$

可知, (p,q) 型算子必为弱 (p,q) 型的, 且 $\|T\|_{w(p,q)} \leqslant \|T\|_{(p,q)}$.

命题 1.2.3 (Hardy-Littlewood 极大算子 M 的初等性质)

(a) M 是 (∞,∞) 型算子;

(b) M 不是 $(1,1)$ 型算子.

证明 由 M 的定义即知 (a) 成立. 现给出一个反例说明 (b). 仅考虑 $n=1$. 取 $f = \chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbb{R})$, 那么对任意的 $x \geqslant 1$

$$Mf(x) \geqslant \frac{1}{2x}\int_0^{2x} |f(y)|dy = \frac{1}{2x}.$$

但 $\dfrac{1}{2x} \notin L^1(\mathbb{R})$. □

下面将说明 M 是弱 $(1,1)$ 型算子. 先给出需用到的 Vitali 型覆盖引理.

引理 1.2.4 (Vitali 型覆盖引理) 设 $E \subset \mathbb{R}^n$, 可测. 又球族 $\mathcal{B}_\Lambda := \{B_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 覆盖了 E, 且满足 $\sup\{d(B_\lambda) : \lambda \in \Lambda\} < \infty$. 这里 $d(B_\lambda)$ 为 B_λ 的直径. 那么存在互不相交的球列 $\{B_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{B}_\Lambda$, 使得

$$|E| \leqslant 5^n \sum_k |B_k|. \tag{1.2.8}$$

证明 记 $\ell_0 = \sup\limits_{\lambda\in\Lambda}\{d(B_\lambda)\}$. 取 $B_1 \in \mathcal{B}_\Lambda$, 使 $d(B_1) > \ell_0/2$. 取 $B_2 \in \mathcal{B}_\Lambda$, 使 $B_2 \cap B_1 = \varnothing$ 且

$$d(B_2) > \frac{1}{2}\sup\{d(B) : B \in \mathcal{B}_\Lambda \text{ 且 } B \cap B_1 = \varnothing\}.$$

一般地, 设 $B_1, B_2, \cdots, B_k$ 已经取好, 我们如下选取 B_{k+1}:

(i) $B_{k+1} \cap \left(\cup_{j=1}^{k} B_j \right) = \varnothing$;

(ii) $d(B_{k+1}) > \dfrac{1}{2} \sup \left\{ d(B) : B \in \mathcal{B}_\Lambda \text{ 且 } B \cap \left(\cup_{j=1}^{k} B_j \right) = \varnothing \right\}$.

这样得到 $B_1, B_2, \cdots, B_k, \cdots$. 如果 $\{B_k\}$ 有限, 那么说明 $\forall\, B \in \mathcal{B}_\Lambda$, $B \cap \left(\cup_{j=1}^{k} B_j \right) \neq \varnothing$. 因此对 $\forall\, x \in E$, 存在 $B_x \in \mathcal{B}_\Lambda$ 使得 $B_x \cap \left(\cup_{j=1}^{k} B_j \right) \neq \varnothing$. 记 B_i 是 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 中第一个与 B_x 相交的球, 则由 (ii) 知, $d(B_i) > \dfrac{1}{2} d(B_x)$. 因此 $B_x \subset 5B_i$. 这样

$$E \subset \bigcup_{x \in E} B_x \subset \bigcup_{j=1}^{k} 5B_j. \tag{1.2.9}$$

由 (1.2.9) 即可获得 (1.2.8).

现设 $\{B_k\}$ 为无限集. 如 $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| = \infty$, 则结论自然成立. 因此不妨设 $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| < \infty$. 记 $B_k^* = 5B_k$, 则 $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^*$. 事实上, 由 $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| < \infty$ 知 $d(B_k) \to 0 \quad (k \to \infty)$. 因此对任意的 $B \in \mathcal{B}_\Lambda$, 存在 k 使得 $d(B_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2} d(B)$. 不妨假定 k 是满足此性质的最小下标, 因此 B 必定与 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 中某球相交. (否则 $d(B_{k+1}) > \frac{1}{2} d(B)$.) 现记 B_j 是 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 中第一个与 B 相交的球, 那么 (ii) 知, $d(B_j) > \frac{1}{2} d(B)$. 因此仍有 $B \subset 5B_j = B_j^*$. 这样

$$E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^*. \tag{1.2.10}$$

此时 (1.2.8) 即可由 (1.2.10) 得到. □

定理 1.2.5 Hardy-Littlewood 极大算子 M 是弱 (1,1) 型算子. 即: 存在常数 $C = C_n$, 使得对任意的 $\lambda > 0$ 及 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda} \|f\|_1. \tag{1.2.11}$$

证明 对任意的 $\lambda > 0$ 及 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 记 $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > \lambda\}$, 那么由命题 1.2.2, E_λ 为开集. 另一方面, 对 $\forall\, x \in E_\lambda$, 存在球 B_x 使得

$$\frac{1}{|B_x|} \int_{B_x} |f(t)| dt > \lambda. \tag{1.2.12}$$

因此由 (1.2.12)

$$|B_x| < \frac{1}{\lambda} \int_{B_x} |f(t)| dt \leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_1 < \infty. \tag{1.2.13}$$

这样 $\mathcal{B} = \{B_x : x \in E_\lambda\}$ 覆盖了 E_λ, 且 (1.2.13) 说明 $\sup\{d(B_x) : B_x \in \mathcal{B}\} < \infty$. 运用引理 1.2.4, 存在互不相交的球列 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{B}$, 使得 $|E_\lambda| \leqslant 5^n \sum_k |B_k|$. 所

以由 (1.2.12)

$$|E_\lambda| \leqslant 5^n \sum_k |B_k| \leqslant 5^n \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{B_k} |f(t)|dt = \frac{5^n}{\lambda} \int_{\bigcup_{k=1}^\infty B_k} |f(t)|dt \leqslant \frac{C_n}{\lambda} \|f\|_1.$$

此即为 (1.2.11) 式. □

在证明 Hardy-Littlewood 极大算子 M 为 (p,p) 型算子之前, 先给出分布函数的定义.

定义 1.2.6 设 f 为 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 对 $s>0$,

$$\lambda_f(s) = |\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > s\}|$$

称为 f 的分布函数.

命题 1.2.6 (分布函数的基本性质)

(a) 对 $\mathbb{R}^n$ 上的任意可测函数 f, 其分布函数 $\lambda_f(s)$ 在 $(0,\infty)$ 上是非增的;

(b) 如 $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 那么 $\lambda_f(s) \leqslant \lambda_g(s)$, $s>0$;

(c) 如 $0 \leqslant f_1 \leqslant f_2 \leqslant \cdots$, 且对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, $f_k(x) \uparrow f(x)\,(k \to \infty)$, [5] 那么对 $s>0$, 当 $k \to \infty$ 时, $\lambda_{f_k}(s) \uparrow \lambda_f(s)$;

(d) 如 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\|f\|_\infty = \inf\{s : \lambda_f(s) = 0\}$;

(e) 如 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p < \infty)$, 那么

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty s^{p-1} \lambda_f(s) ds. \tag{1.2.14}$$

证明 结论 (a)(b) 及 (d) 由定义直接可得. 下面说明 (c). 记

$$E_g(s) = \{x \in \mathbb{R}^n : |g(x)| > s\},$$

那么 $\{E_{f_k}(s)\}$ 为单增的集合列, 且 $E_f(s) = \bigcup_k E_{f_k}(s)$. 因此

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{f_k}(s) = \lambda_f(s), \quad s>0.$$

最后给出 (e) 的证明. 事实上,

$$\begin{aligned} p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_f(s)ds &= p\int_0^\infty s^{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_f(s)}(x)dx\,ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p\int_0^\infty s^{p-1}\chi_{E_f(s)}(x)ds\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} p\int_0^{|f(x)|} s^{p-1}ds\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx. \end{aligned}$$

□

[5]本书中 "↑" 表示单调递增收敛.

定理 1.2.7 对 $1 < p \leqslant \infty$, Hardy-Littlewood 极大算子 M 是 (p,p) 型算子. 即：存在常数 $C = C_{n,p}$, 使得对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 有

$$\|Mf\|_p \leqslant C_{n,p}\|f\|_p. \tag{1.2.15}$$

证明 由定理 1.2.3(a) 知 $\|Mf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. 下面仅讨论 $1 < p < \infty$ 的情况. 任意取定的 $s > 0$, 令

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & |f(x)| > s, \\ 0, & |f(x)| \leqslant s, \end{cases}$$

$$f_2(x) = f(x) - f_1(x).$$

那么 $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 由 M 的次可加性,

$$\lambda_{Mf}(2s) \leqslant \lambda_{Mf_1}(s) + \lambda_{Mf_2}(s). \tag{1.2.16}$$

注意到 $\|Mf_2\|_\infty \leqslant \|f_2\|_\infty \leqslant s$, 因此 $\lambda_{Mf_2}(s) = 0$. 这一事实结合 (1.2.16) 得 $\lambda_{Mf}(2s) \leqslant \lambda_{Mf_1}(s)$. 因此运用 (1.2.14) 以及算子 M 的弱 (1,1) 型 (定理 1.2.5)

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_p^p &= p\int_0^\infty (2s)^{p-1}\lambda_{Mf}(2s)d(2s) \\
&= p\,2^p \int_0^\infty s^{p-1}\lambda_{Mf}(2s)ds \\
&\leqslant p\,2^p \int_0^\infty s^{p-1}\lambda_{Mf_1}(s)ds \\
&\leqslant p\,2^p \int_0^\infty s^{p-1}\frac{C}{s}\|f_1\|_1 ds \\
&= Cp\,2^p \int_0^\infty s^{p-2}\int_{|f(x)|>s} |f(x)|dx\,ds \\
&= Cp\,2^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\int_0^{|f(x)|} s^{p-2}ds\,dx \\
&= \frac{Cp\,2^p}{p-1}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)||f(x)|^{p-1}dx \\
&= \frac{Cp\,2^p}{p-1}\|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

这样 (1.2.15) 获证. □

[注 1.2.2] 由定理 1.2.5 和定理 1.2.7 的结论可知, 当 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 时, f 的 Hardy-Littlewood 极大函数 Mf 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有限.

§1.2.2 算子族的点态收敛与 Lebesgue 微分定理

证明 Lebesgue 微分定理 (定理 1.2.9) 是 Hardy-Littlewood 极大算子的重要应用之一. 在这里我们将首先给出一个一般性的算子族点态收敛定理, Lebesgue 微分定理将作为它的一个推论. 从算子族点态收敛定理的证明过程中, 将可看到一个重要的思想, 即: 算子族的点态收敛性问题往往归结为相关的极大算子的弱有界性问题.

定理 1.2.8 (算子族的点态收敛性) 设 $\{T_\varepsilon\}\,(\varepsilon>0)$ 是将 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 映入 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数空间的线性算子族. 如下定义算子族 $\{T_\varepsilon\}$ 的极大算子 T^*: 对任意的 $h\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $x\in\mathbb{R}^n$, $(T^*h)(x)=\sup\limits_{\varepsilon>0}|(T_\varepsilon h)(x)|$. 如果

(i) T^* 是弱 (p,q) 型算子 $(1\leqslant p,\,q\leqslant\infty)$. 即: 存在常数 $a>0$, 使得对任意的 $\lambda>0$ 及 $h\in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:|(T^*h)(x)|>\lambda\}|\leqslant\left(\frac{a}{\lambda}\|h\|_p\right)^q; \tag{1.2.17}$$

(ii) 对于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的某稠密子集 $\mathcal{D}$ 中任一元 g, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon g(x)$ a.e. 存在且有限, 那么对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon f(x)$ a.e. 存在且有限.

证明 只需证明, 使得当 $\varepsilon\to0$ 时, $\{(T_\varepsilon f)(x)\}$ 的极限不存在及极限为无穷的点 x 所成之集的测度为零即可. 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 对 $k>0$, 记

$$F_k=\Big\{x\in\mathbb{R}^n:\ |(T_{\varepsilon'}f)(x)-(T_{\varepsilon''}f)(x)|>2/k,\ \text{对无限多对}\ (\varepsilon',\varepsilon''),\ (\varepsilon',\varepsilon'')\to(0,0)\Big\}$$

及 $F=\bigcup_{k=1}^\infty F_k$. 下面将证明, 对任意的 $\eta>0$,

$$|F_k|\leqslant[2a(k+1)\eta]^q. \tag{1.2.18}$$

这样由 η 的任意性得 $|F_k|=0$, 并由此推出 $|F|=0$, 从而完成定理的证明.

因 $\mathcal{D}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 故对上述 $\eta>0$, 存在 $g\in\mathcal{D}$ 使得 $\|f-g\|_p<\eta$. 令

$$G=\{x\in\mathbb{R}^n:\lim_{\varepsilon\to0}(T_\varepsilon g)(x)\ \text{存在且有限}\ \}.$$

由 (ii) 知 $|\mathbb{R}^n\backslash G|=0$. 而

$$F_k=(F_k\cap G)\cup(F_k\cap(\mathbb{R}^n\backslash G)).$$

因此

$$|F_k| \leqslant |F_k \cap G| + |F_k \cap (\mathbb{R}^n \backslash G)| = |F_k \cap G|. \tag{1.2.19}$$

故为获得 (1.2.18), 只需说明 $|F_k \cap G| \leqslant [2a(k+1)\eta]^q$ 即可. 记 $f = g + h$, 则

$$|(T_{\varepsilon'}f)(x) - (T_{\varepsilon''}f)(x)| \leqslant |(T_{\varepsilon'}g)(x) - (T_{\varepsilon''}g)(x)| + |(T_{\varepsilon'}h)(x) - (T_{\varepsilon''}h)(x)|$$

及对任意的 $x \in G$,

$$\lim_{(\varepsilon',\varepsilon'')\to(0,0)} |(T_{\varepsilon'}g)(x) - (T_{\varepsilon''}g)(x)| = 0.$$

另一方面, 令

$$H_k = \Big\{x \in \mathbb{R}^n: \ |(T_{\varepsilon'}h)(x) - (T_{\varepsilon''}h)(x)| \geqslant 1/k, \quad \text{对无限多对 } (\varepsilon',\varepsilon''), \ (\varepsilon',\varepsilon'') \to (0,0)\Big\}.$$

则有下面的事实

$$(F_k \cap G) \subset H_k. \tag{1.2.20}$$

这是因为, 如记

$$Q_k =: \left\{x \in \mathbb{R}^n: \lim_{(\varepsilon',\varepsilon'')\to(0,0)} |(T_{\varepsilon'}g)(x) - (T_{\varepsilon''}g)(x)| \geqslant 1/k\right\},[6]$$

那么 $F_k \subset (Q_k \cup H_k)$. 因此

$$(F_k \cap G) \subset \big((Q_k \cap G) \cup (H_k \cap G)\big) = (H_k \cap G) \subset H_k.$$

故 (1.2.20) 成立. 另一方面由 T^* 的定义

$$H_k \subset \{x \in \mathbb{R}^n : (T^*h)(x) \geqslant 1/2k\ \} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : (T^*h)(x) > 1/2(k+1)\ \}.$$

由条件 (i), T^* 是弱 (p,q) 型算子, 因此

$$\begin{aligned}|F_k \cap G| \leqslant |H_k| &\leqslant |\{x \in \mathbb{R}^n : (T^*h)(x) > 1/2(k+1)\ \}| \\ &\leqslant [2a(k+1)\|h\|_p]^q < [2a(k+1)\eta]^q.\end{aligned}$$

这样由 (1.2.19) 得到 (1.2.18). □

[6] 本书中 $a := b$ 和 $b =: a$ 都表示 "a" 是用 "b" 定义的. 即: 挨着冒号的表达式是用挨着等号的符号来定义的.

定理 1.2.9 (Lebesgue微分定理) 设 $f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 则有如下结论:

(a) 对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}[f(x-t)-f(x)]dt=0. \tag{1.2.21}$$

使上述极限成立的点 x 的全体称为 f 积分的可微点集.

(b) 对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|dt=0. \tag{1.2.22}$$

使上述极限成立的点 x 称为 f 的 Lebesgue 点, 其全体称为 f 的 Lebesgue 点集.

证明 (a) 的证明. 不妨假定 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. (不然的话, 可令 $f_k(x)=f(x)\chi_{B(k)}(x)$, 先对 $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 证明该结论, 再令 $k\to\infty$ 即可.) 记 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积为 v_n. 对任意的 $\varepsilon>0$ 及 $x\in\mathbb{R}^n$, 令

$$T_\varepsilon f(x)=\frac{1}{v_n\varepsilon^n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}f(x-t)dt.$$

显然

$$(T^*f)(x)=\sup_{\varepsilon>0}|(T_\varepsilon f)(x)|\leqslant Mf(x).$$

且由 Hardy-Littlewood 极大算子 M 的弱 (1,1) 型 (定理 1.2.5) 可知 T^* 也是弱 (1,1) 型算子. 这是因为存在 $C>0$, 使得对任意的 $\lambda>0$ 及 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|\{x\in\mathbb{R}^n:(T^*f)(x)>\lambda\}|\leqslant|\{x\in\mathbb{R}^n:Mf(x)>\lambda\}|\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1. \tag{1.2.23}$$

另一方面, 因 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠, 且对 $\forall\, g\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon g)(x)=g(x),\quad \forall\, x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.2.24}$$

事实上, 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}|(T_\varepsilon g)(x)-g(x)|&=\left|\frac{1}{v_n}\int_{|t|\leqslant 1}[g(x-\varepsilon t)-g(x)]dt\right|\\&\leqslant\frac{1}{v_n}\int_{|t|\leqslant 1}|g(x-\varepsilon t)-g(x)|dt.\end{aligned}$$

由 g 的连续性以及 Lebesgue 控制收敛定理知 (1.2.24) 成立. 这样由 (1.2.23) 和 (1.2.24), 并应用定理 1.2.8 知,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v_n\varepsilon^n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}f(x-t)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}(T_\varepsilon f)(x)\quad \text{a.e. 存在且有限.}$$

下面说明此极限 a.e. 为 f. 由积分连续性知

$$\lim_{|t|\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-t)-f(x)|dx=0.$$

故

$$\begin{aligned}\|T_\varepsilon f-f\|_1&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{1}{v_n\varepsilon^n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}[f(x-t)-f(x)]dt\right|dx\\&\leqslant\frac{1}{v_n}\int_{|t|\leqslant 1}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon t)-f(x)|dx\,dt\to 0\quad(\varepsilon\to 0).\end{aligned}$$

此说明 $\{T_\varepsilon\}\,(\varepsilon>0)$ 依 L^1 范数收敛于 f. 由 Riesz 定理, 存在 $\{\varepsilon_k\}$ 满足 $\varepsilon_k\to 0\ (k\to\infty)$, 使得 $T_{\varepsilon_k}(x)\to f(x)$ a.e. $(k\to\infty)$. 因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{v_n\varepsilon^n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}f(x-t)dt=f(x)\quad \text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

(b) 的证明. 记 $\mathbb{R}^1$ 中有理数的全体为 $\mathbb{Q}$. 对 $\gamma\in\mathbb{Q}$, 令 F_γ 为 $\mathbb{R}^n$ 中使得

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}\big(|f(x-t)-\gamma|-|f(x)-\gamma|\big)dt=0$$

不成立的一切 x 组成的点集. 显然, $|f(x)-\gamma|\in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 由结论 (a) 知 $|F_\gamma|=0$. 如记 $F=\bigcup_{\gamma\in\mathbb{Q}}F_\gamma$, 则 $|F|=0$. 因此只需证明, 对 $\forall\, x\in\mathbb{R}^n\backslash F$, (1.2.22) 成立. 事实上, 对 $\forall\, x\in\mathbb{R}^n\backslash F$ 及 $\varepsilon>0$, 取 $\gamma\in\mathbb{Q}$, 使得 $|f(x)-\gamma|<\varepsilon/2$. 那么

$$\begin{aligned}\frac{1}{v_nr^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|dt&\leqslant\frac{1}{v_nr^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-\gamma|dt\\&\quad+\frac{1}{v_nr^n}\int_{|t|<r}|f(x)-\gamma|dt\\&:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

显然 $I_2<\varepsilon/2$. 而当 $r\to 0$ 时

$$I_1=\frac{1}{v_nr^n}\int_{|t|<r}\big(|f(x-t)-\gamma|-|f(x)-\gamma|\big)dt+|f(x)-\gamma|\leqslant\varepsilon/2.$$

从而 (1.2.22) 成立. □

事实上，还有下面一般的结论：

定理 1.2.10 如 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ (1\leqslant p<\infty)$, 那么对 a.e. $x\in\mathbb{R}^n$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{|t|\leqslant\varepsilon}|f(x-t)-f(x)|^pdt=0. \tag{1.2.25}$$

[注 1.2.3] 使 (1.2.25) 成立的点称为 f 的 p 次 Lebesgue 点. f 的一次 Lebesgue 点简称为 f 的 Lebesgue 点. $\mathbb{R}^n$ 中 f 的 Lebesgue 点的全体称为 f 的 Lebesgue 点集. Lebesgue 点的概念是刻画局部性质的, 可以只对局部可积 (或者局部 p 次可积) 的函数来定义. 如果 $f \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < \infty)$, 那么 f 的 p 次 Lebesgue 点必然是 f 的 Lebesgue 点.

Lebesgue 微分定理是分析中非常基本且重要的定理. 其本质上是说明这样一个事实：一个 $\mathbb{R}^n$ 上的局部可积函数 f 在球体上的平均, 当球体收缩到其中心时, 以 f 在中心的取值为极限, 且此事实对 $\mathbb{R}^n$ 上几乎所有的点成立.

那么一个自然的问题是：如果以其他的几何体替代球体时, 上述事实仍然成立吗？从上面证明过程可以看出, 微分定理是否成立不仅依赖于积分连续性 (这是容易满足的), 而且更本质地依赖于相应的极大算子的弱有界性. 1978 年 Fields 奖得主、美国著名数学家 C. Fefferman 在 1974 年温哥华国际数学家大会的一小时报告 [27] 中总结了 $\mathbb{R}^2$ 上的情形. 记

$\mathscr{Q} = \{\mathbb{R}^2$上所有正方形$\}$ (其边不必与坐标轴平行)；

$\mathscr{R}_1 = \{\mathbb{R}^2$上所有边与坐标轴平行的矩形$\}$；

$\mathscr{R}_2 = \{\mathbb{R}^2$上所有任意方向的矩形$\}$.

则有如下结果：

定理 1.2.11 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, 那么

$$\lim_{\substack{Q\in\mathscr{Q}\\ Q\to(x_1,x_2)}} \frac{1}{|Q|}\int_Q f(y_1,y_2)dy_1\,dy_2 = f(x_1,x_2) \quad \text{a.e.} \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

其中, $Q \to (x_1,x_2)$ 意指 $Q \ni (x_1,x_2)$ 且 Q 收缩到 (x_1,x_2). (下同)

定理 1.2.12 如 $f \in L^p(\mathbb{R}^2)$ $(1 < p < \infty)$, 那么

$$\lim_{\substack{R\in\mathscr{R}_1\\ R\to(x_1,x_2)}} \frac{1}{|R|}\int_R f(y_1,y_2)dy_1\,dy_2 = f(x_1,x_2) \quad \text{a.e.} \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

然而, 当 $p=1$ 时定理 1.2.12 的结论并不成立. 即：存在 $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$ 以及 $\{R_j\} \subset \mathscr{R}_1$, 使得当 $(x_1,x_2)\in R_j$ 且 $R_j \to (x_1,x_2)$ 时,

$$\frac{1}{|R_j|}\int_{R_j} f_0(y_1,y_2)dy_1\,dy_2$$

没有任何有限极限. 其原因在于相应于 $\mathscr{R}_1$ 的强极大算子 M_s 不是弱 (1,1) 型的.

这里 M_s 定义为:

$$M_s f(x_1,x_2) = \sup_{\substack{R\in\mathscr{R}_1 \\ R\ni(x_1,x_2)}} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y_1,y_2)|dy_1\,dy_2.$$

作为当 $p=1$ 时定理 1.2.12 的替代结果, 下面的结论成立.

定理 1.2.13 如 $f\in L\log^+L(\mathbb{R}^2)$, [7] 那么

$$\lim_{\substack{R\in\mathscr{R}_1 \\ R\to(x_1,x_2)}} \frac{1}{|R|}\int_R f(y_1,y_2)dy_1\,dy_2 = f(x_1,x_2) \quad \text{a.e.} \quad (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

定理 1.2.14 (定理 1.2.12 和定理 1.2.13 的高维形式) 对 $n\geqslant 2$, 如 $f\in L(\log^+L)^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ 或 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$, 那么

$$\lim_{\substack{R\in\mathscr{R} \\ R\to x}} \frac{1}{|R|}\int_R f(y)dy = f(x) \quad \text{a.e.} \quad x\in\mathbb{R}^n,$$

其中 $\mathscr{R}$ 记 $\mathbb{R}^n$ 中所有边与坐标轴平行的矩形.

至于几何体取自 $\mathscr{R}_2$ 时, 情况更差. 甚至存在有界函数 f_0 及 $R\in\mathscr{R}_2$, 当 $R\to(x_1,x_2)$ 时, 几乎无处存在

$$\frac{1}{|R|}\int_R f_0(y_1,y_2)dy_1\,dy_2 \to f_0(x_1,x_2).$$

其原因在于, 对于 $1<p<\infty$, 相应于 $\mathscr{R}_2$ 的强极大算子

$$M_s^+ f(x_1,x_2) = \sup_{\substack{R\in\mathscr{R}_2 \\ R\ni(x_1,x_2)}} \frac{1}{|R|}\int_R |f(y_1,y_2)|dy_1\,dy_2$$

甚至不是 (p,p) 型算子.

§1.2.3 算子族的收敛性在遍历理论中的应用 *

在上面应用算子族的点态收敛获得了 Lebesgue 微分定理. 本节我们将应用算子族收敛性导出几个重要的遍历定理. 先给出下面算子族 $\{T_\varepsilon\}$ 收敛性的一个结果, 它可看作是定理 1.2.8 的扩充.

---

[7]本书中, $f\in L(\log^+L)^a(X)$ 表示 $|f|(\log^+|f|)^a\in L^1(X)$, 其中: 对于 $t>0$, $\log^+t=\max\{\log t,0\}$.

定理 1.2.15 (算子族的收敛性) 设 $\{T_\varepsilon\}\,(\varepsilon>0)$ 是将 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 映入 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数空间的线性算子族. 如果

(i) 对所有的 $1\leqslant p<\infty$, 极大算子 T^* 是弱 (p,p) 型算子;

(ii) 存在某个 q, $1\leqslant q<\infty$, 以及 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 的某稠密子集 $\mathcal{D}$, 使得对任一 $g\in\mathcal{D}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon g(x)$ a.e. 存在且有限, 那么下面的结论成立:

(a) 对 $1<p<\infty$, T^* 是 (p,p) 型算子;

(b) 对 $\forall 1\leqslant p<\infty$ 及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}T_\varepsilon f(x)$ a.e. 存在且有限;

(c) 对 $\forall 1<p<\infty$ 及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|T_\varepsilon f-Tf\|_p=0$, 这里算子族的极限 T 由 (b) 所确定;

(d) T 是 (p,p) 型 $(1<p<\infty)$ 及弱 (1,1) 型的.

证明 首先对 $1<p<\infty$, 取 $p<p_0<\infty$. 那么由条件 T^* 是弱 (1,1) 型及弱 (p_0,p_0) 型算子, 应用 Marcinkiewicz 算子内插定理 (见定理 1.4.2) 即知 T^* 是 (p,p) 型算子.

如 $p=q$, 由定理 1.2.8 当 $\varepsilon\to 0$ 时 $T_\varepsilon f(x)$ 的极限 a.e. 存在且有限, 记其为 $Tf(x)$, 那么此时结论 (b) 成立. 如 $p\neq q$, 注意到 $\mathcal{D}_1=L^q(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 的稠密子集. 再次应用定理 1.2.8 的结论知, 对任意的 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p<\infty)$ 结论 (b) 成立. 由结论 (b), 对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1<p<\infty)$ 有

$$|T_\varepsilon f(x)-Tf(x)|^p\to 0\quad(\varepsilon\to 0),\quad \text{a.e.}\quad x. \tag{1.2.26}$$

注意到

$$|T_\varepsilon f(x)-Tf(x)|^p\leqslant(2T^*f(x))^p,\quad \text{a.e.}\quad x. \tag{1.2.27}$$

由 (1.2.26) 和 (1.2.27), 并运用结论 (a) 及 Lebesgue 控制收敛定理可得 (c).

最后, 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p<\infty)$, 有

$$|Tf(x)|\leqslant T^*f(x),\qquad \text{a.e.}\quad x.$$

由 T^* 的弱 (1,1) 有界性及 (p,p) 有界性 (结论 (a)) 知结论 (d) 成立. □

[注 1.2.4] 由定理 1.4.1 知, 如果极大算子 T^* 是弱 $(1,1)$ 型和 (∞,∞) 型算子且满足条件 (ii), 那么定理 1.2.15 全部结论仍然成立.

[注 1.2.5] 从定理 1.2.8 和定理 1.2.15 的证明可以看出, 如在条件 (ii) 中将 “$\varepsilon\to 0$” 改为 “$\varepsilon\to\infty$”, 那么定理 1.2.15 全部结论仍然成立 (相应地, 结论 (b) 和 (c) 中 “$\varepsilon\to 0$” 应改为 “$\varepsilon\to\infty$”).

设 $(X, \mathscr{X}, \mu)$ 是一个测度空间，$\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $X \to X$ 的变换族，且满足如下条件：

(1) $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是一个群，即：对任意的 $t, s \in \mathbb{R}$ 及 $x \in X$

$$\sigma_{t+s}x = \sigma_t(\sigma_s x), \quad \sigma_0 x = x;$$

(2) $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是等可测的，即：对任意的 $E \in \mathscr{X}$ 及 $t \in \mathbb{R}$，集 $\sigma_t E = \{\sigma_t x : x \in E\} \in \mathscr{X}$，且 $\mu(\sigma_t E) = \mu(E)$;

(3) 对 X 上任一可测函数 f，$f(\sigma_t x)$ 是 $X \times \mathbb{R}$ 上关于 (x, t) 的可测函数.

例如，取 $X = \mathbb{R}$，μ 为 Lebesgue 测度，σ_t 为 $\mathbb{R}$ 中的平移算子 τ_t，那么 $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 满足上面条件.

命题 1.2.16 ($\{\sigma_t\}$ 的等可积性) 对 X 上任一可积函数 f，有

(a) 对 $\forall\, t \in \mathbb{R}$，$\displaystyle\int_X f(\sigma_t x)d\mu(x) = \int_X f(x)d\mu(x)$;

(b) 对 $\forall\, E \in \mathscr{X}$，$\displaystyle\int_E f(\sigma_t x)d\mu(x) = \int_{\sigma_t E} f(x)d\mu(x)$.

证明 关于结论 (a)，由于简单函数类在 $L^1(X, \mu)$ 中稠密，因此只需考虑 $f = \chi_E$ 的情形，其中 $E \in \mathscr{X}$ 且 $\mu(E) < \infty$. 由于对 $t \in \mathbb{R}$，$\chi_E(\sigma_t x) = \chi_{\sigma_{-t}E}(x)$，因此由 (2) 得

$$\int_X \chi_E(\sigma_t x)d\mu(x) = \int_X \chi_{\sigma_{-t}E}(x)d\mu(x) = \mu(\sigma_{-t}E) = \mu(E) = \int_X \chi_E(x)d\mu(x).$$

类似地可证明结论 (b). □

引理 1.2.17 设 $f \in L^1(X, \mu)$，那么对 a.e. $x \in X$，$f_x(t) = f(\sigma_t x)$ 在每个有限区间上关于 t 是可积函数. 此外

$$F(x) = \left|\int_0^r f_x(t)dt\right| < \infty.$$

证明 不妨设 $f \geqslant 0$. 由条件 (3) 知 $f(\sigma_t x)$ 是关于 (x, t) 的非负可测函数，因此 $F(x)$ a.e. 有定义. 进一步，由命题 1.2.16(a)，

$$\begin{aligned}\int_X F(x)d\mu(x) &= \int_X \int_0^r f(\sigma_t x)dtd\mu(x)\\ &= \int_0^r \int_X f(\sigma_t x)d\mu(x)dt\\ &= \int_0^r \int_X f(x)d\mu(x)dt\\ &= r\|f\|_1 < \infty.\end{aligned}$$

因此 $F(x)<\infty$ a.e. □

这样对 $f\in L^1(X,\mu)$ 及满足条件 (1)~(3) 的 $\{\sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 如下定义的算子族 $\{T_r\}_{r>0}$ 是有意义的:

$$T_rf(x)=\frac{1}{r}\int_0^r f(\sigma_t x)dt,\qquad x\in X \text{ 且 } r>0.$$

称其为遍历算子族. 遍历算子族 $\{T_r\}_{r>0}$ 的极大算子定义为

$$T^*f(x)=\sup_{r>0}|T_rf(x)|.$$

例如, 取 $X=\mathbb{R}$, μ 为 Lebesgue 测度, σ_t 为 $\mathbb{R}$ 中的平移算子 τ_t, 那么对可积函数 f,

$$T_rf(x)=\frac{1}{r}\int_0^r f(x-t)dt,$$

且 $T^*f(x)\leqslant Mf(x)$, 这里 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子.

引理 1.2.18 对 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 及常数 $a>0$, 记 $g^{(a)}(t)=g(t)\chi_{(0,a)}(t)$. 那么对 $f\in L^1(X,\mu)$ 及 $0\leqslant r,s\leqslant N$, 有

$$(T_rf)_x(s)=(L_rf_x^{(2N)})(s),\tag{1.2.28}$$

其中, $L_rg(s)=\frac{1}{r}\int_s^{s+r}g(t)dt$. 对固定的 $x\in X$, $f_x(s)=f(\sigma_s x)$.

证明 注意到当 $0\leqslant t\leqslant r$ 时, $0\leqslant t+s\leqslant 2N$. 因此

$$\begin{aligned}(T_rf)_x(s)=(T_rf)(\sigma_s x)&=\frac{1}{r}\int_0^r f(\sigma_t(\sigma_s x))dt\\&=\frac{1}{r}\int_0^r f(\sigma_{t+s}x)dt=\frac{1}{r}\int_0^r f_x(t+s)dt\\&=\frac{1}{r}\int_0^r f_x^{(2N)}(t+s)dt=(L_rf_x^{(2N)})(s).\end{aligned}$$

□

定理 1.2.19 (遍历算子族的收敛性) 设 $\{T_r\}_{r>0}$ 是遍历算子族, 那么

(a) 对 $1<p<\infty$, T^* 是 (p,p) 型算子;

(b) 对 $\forall 1\leqslant p<\infty$ 及 $f\in L^p(X,\mu)$, $\lim\limits_{r\to\infty}T_rf(x)$ a.e. 存在且有限;

(c) 对 $\forall 1<p<\infty$ 及 $f\in L^p(X,\mu)$, $\lim\limits_{r\to\infty}\|T_rf-Tf\|_p=0$, 这里算子族的极限 T 由 (b) 所确定;

(d) T 是 (p,p) 型 $(1<p<\infty)$ 及弱 (1,1) 型的.

证明 由 [注 1.2.4] 和 [注 1.2.5] 知，为获得结论 (a)~(d), 只需说明以下两个事实：

(A) 算子族 $\{T_r\}_{r>0}$ 的极大算子 T^* 是弱 (1,1) 型和 (∞,∞) 型的；

(B) 存在 $L^2(X,\mu)$ 的稠密子集 $\mathcal{D}$, 使得对任一 $g\in\mathcal{D}$,

$$\lim_{r\to\infty} T_r g(x) \quad \text{a.e. 存在且有限.}$$

先说明 (A). 由 T^* 的定义即知 T^* 是 (∞,∞) 型算子，且 $\|T^*\|_{(\infty,\infty)}\leqslant 1$. 下面说明 T^* 是弱 (1,1) 型的. 对 $N>0$, 令

$$T_N^* f(x) = \sup_{0<r<N} |T_r f(x)|.$$

那么对 $\forall\, x\in X$, $T_N^* f\uparrow T^*f\,(N\to\infty)$. 由命题 1.2.6(c) 知 $\lambda_{T_N^*f}(\alpha)\uparrow\lambda_{T^*f}(\alpha)$. 这里

$$\lambda_g(\alpha) =: \mu(\{x\in X: |g(x)|>\alpha\}),\quad \alpha>0$$

为 g 在 (X,μ) 中的分布函数. 因此只需说明：存在常数 $C>0$ 使得对任意的 $\alpha,N>0$ 有

$$\lambda_{T_N^*f}(\alpha)\leqslant \frac{C}{\alpha}\int_X |f(x)|d\mu(x). \tag{1.2.29}$$

记 $\chi(x)$ 为集 $\{x\in X: T_N^*f(x)>\alpha\}$ 的特征函数，那么 (1.2.29) 可写为

$$\int_X \chi(x)d\mu(x)\leqslant \frac{C}{\alpha}\int_X |f(x)|d\mu(x). \tag{1.2.30}$$

令 $\chi_x(s)=\chi(\sigma_s x)$. 则对任意固定的 $x\in X$, 令 $\chi_x(s)$ 是集 $\{s: T_N^*f(\sigma_s x)>\alpha\}$ 的特征函数. 记

$$M_N f(s) = \sup_{0<r<N}\frac{1}{r}\int_0^r |f(s-t)|dt.$$

那么 $M_N f(s)\uparrow Mf(s)$, 这里 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子. 由 (1.2.28), 对于 $0\leqslant s\leqslant N$,

$$(T_N^*f)_x(s)\leqslant M_N(f_x^{(2N)})(s)\leqslant M(f_x^{(2N)})(s).$$

记集合 $\{s: M(f_x^{(2N)})(s)>\alpha\}$ 的特征函数为 $\phi_x(s)$, 那么

$$\int_0^N \phi_x(s)ds\leqslant\int_0^\infty \phi_x(s)ds = \lambda_{M(f_x^{(2N)})}(\alpha).$$

由 M 是弱 (1,1) 型算子，得到

$$\int_0^N \phi_x(s)ds\leqslant \frac{A}{\alpha}\|f_x^{(2N)}\|_1 = \frac{A}{\alpha}\int_0^\infty |f_x^{(2N)}(s)|ds = \frac{A}{\alpha}\int_0^{2N}|f_x(s)|ds. \tag{1.2.31}$$

因 (1.2.31) 对任意的 $x \in X$ 成立，故

$$\int_X \left(\int_0^N \phi_x(s) ds \right) d\mu(x) \leqslant \frac{A}{\alpha} \int_X \int_0^{2N} |f_x(s)| ds \, d\mu(x).$$

应用 Fubini 定理及命题 1.2.16 得到

$$\int_X \chi(x) d\mu(x) \leqslant \frac{2A}{\alpha} \int_X |f(x)| d\mu(x).$$

此即为 (1.2.30) 式（取 $C = 2A$）.

下面说明 (B) 成立. 我们考虑 $L^2(X, \mu)$ 中两类函数:

$$\mathcal{P} = \{\phi \in L^2(X, \mu) : \ \phi(\sigma_t x) = \phi(x) \quad \text{a.e. } x \in X, \forall t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{Q} = \Big\{\psi \in L^2(X, \mu) : \exists \gamma \in L^2(X, \mu) \cap L^\infty(X, \mu),$$

$$\text{及 } s \in \mathbb{R} \text{ 使得 } \psi(x) = \gamma(x) - \gamma(\sigma_s x)\Big\}.$$

如 $\phi \in \mathcal{P}$ 及 $r > 0$, 有

$$T_r\phi(x) = \frac{1}{r} \int_0^r \phi(\sigma_t x) dt = \frac{1}{r} \int_0^r \phi(x) dt = \phi(x).$$

因此

$$\lim_{r \to \infty} T_r \phi(x) = \phi(x), \quad \forall \, \phi \in \mathcal{P}.$$

且亦有

$$\lim_{r \to \infty} T_r \psi(x) = 0, \quad \forall \, \psi \in \mathcal{Q}.$$

事实上，写 $\psi(x) = \gamma(x) - \gamma(\sigma_s x)$, 并取 $C \geqslant \|\gamma\|_\infty$, 那么对 $r > 0$

$$\begin{aligned}
T_r \psi(x) &= \frac{1}{r} \int_0^r \big(\gamma(\sigma_t x) - \gamma(\sigma_t \sigma_s x)\big) dt \\
&= \frac{1}{r} \int_0^r \gamma_x(t) dt - \frac{1}{r} \int_0^r \gamma_x(t+s) dt \\
&= \frac{1}{r} \int_0^r \gamma_x(t) dt - \frac{1}{r} \int_s^{s+r} \gamma_x(t) dt \\
&= \frac{1}{r} \int_0^s \gamma_x(t) dt - \frac{1}{r} \int_r^{r+s} \gamma_x(t) dt.
\end{aligned}$$

这样 $|T_r \psi(x)| \leqslant 2Cs/r$. 因此 $\lim\limits_{r \to \infty} T_r \psi(x) = 0$.

现记

$$\mathcal{D}=\{g\in L^2(X,\mu):\ g=\phi+\psi,\ \phi\in\mathcal{P}\text{且}\psi\in\mathcal{Q}\}.$$

由上面的讨论，余下仅需说明 $\mathcal{D}$ 在 $L^2(X,\mu)$ 中稠密. 先说明 $\mathcal{P}=\mathcal{Q}^\perp$. 容易看出 $\mathcal{P}\subset\mathcal{Q}^\perp$. 反之，设 $h\in\mathcal{Q}^\perp$ 且 $\{h_k\}\subset L^2(X,\mu)\cap L^\infty(X,\mu)$ 使得 $\|h_k-h\|_2\to 0$. 对任意的 $s\in\mathbb{R}$, 令 $\psi=h_k-h_{ks}$, 这里 $h_{ks}(x)=h_k(\sigma_s x)$, 因此 $\psi\in\mathcal{Q}$ 且当 $k\to\infty$ 时

$$\begin{aligned}0=\langle h,h_k-h_{ks}\rangle&=\int_X h(x)\overline{(h_k(x)-h_k(\sigma_s x))}d\mu(x)\\&\longrightarrow\int_X h(x)\overline{(h(x)-h(\sigma_s x))}d\mu(x)\\&=\langle h,h-h_s\rangle.\end{aligned}$$

因此

$$\|h-h_s\|_2^2=\langle h,h\rangle-\langle h_s,h_s\rangle+\langle h,h-h_s\rangle-\langle h_s,h-h_s\rangle=-\langle h_s,h-h_s\rangle.$$

注意到

$$\begin{aligned}\langle h_s,h-h_s\rangle&=\int_X h(\sigma_s x)\overline{(h(x)-h(\sigma_s x))}d\mu(x)\\&=\int_X h(x)\overline{(h(\sigma_{-s}x)-h(x))}d\mu(x)\\&=\langle h,h_{-s}-h\rangle=0.\end{aligned}$$

因此对任意的 s, $\|h-h_s\|_2=0$. 从而对于每个 s, $h_s=h$ a.e. 成立. 故 $\mathcal{P}\supset\mathcal{Q}^\perp$. 这样 $\mathcal{P}$ 是 $L^2(X,\mu)$ 中的闭子空间，从而 $L^2(X,\mu)=\mathcal{P}\oplus\mathcal{P}^\perp$. 因此对任一 $f\in L^2(X,\mu)$, 存在唯一的 $g\in\mathcal{P}$ 及 $h\in\mathcal{P}^\perp$, 使得 $f=g+h$. 由于 $\mathcal{P}^\perp=(\mathcal{Q}^\perp)^\perp$, 故

$$\langle h,\eta\rangle=0,\quad\text{对任意的}\quad\eta\in\mathcal{Q}^\perp.\tag{1.2.32}$$

(1.2.32) 表明，或者 $h\in\mathcal{Q}$, 或者 h 是 $\mathcal{Q}$ 中的点列的极限. 这样 $\mathcal{D}$ 在 $L^2(X,\mu)$ 中稠密，从而完成了定理 1.2.19 的证明. □

[注 1.2.6] 定理 1.2.19 的结论 (b) 相应于 Birkhoff-Khinchin 点态遍历定理；定理 1.2.19 的结论 (c) 相应于 von Neumann 平均遍历定理；定理 1.2.19 的结论 (d) 相应于 Wiener 控制遍历定理. 有关遍历理论的深入讨论亦可见 [21].

§1.3 恒等逼近

§1.3.1 恒等逼近算子的收敛

定义 1.3.1 设 φ 在 $\mathbb{R}^n$ 上可测. 对 $\forall\ \varepsilon>0$, 记 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. 若对于 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\leqslant p\leqslant\infty)$, 当 $\varepsilon\to 0$ 时, 在一定意义下 (依范数或点态) 有 $f*\varphi_\varepsilon(x)\longrightarrow f$, 则称 φ 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的恒等逼近核. 算子 $T:\ f\longrightarrow f*\varphi_\varepsilon$ 称为恒等逼近算子 (当 $\varepsilon\to 0$).

定理 1.3.1 设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=a$. 如 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\leqslant p<\infty$, 或 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)\subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|(f*\varphi_\varepsilon)-af\|_p=0. \tag{1.3.1}$$

证明 易见

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=a. \tag{1.3.2}$$

对于 $1\leqslant p<\infty$, 运用 Minkowski 不等式,

$$\|(f*\varphi_\varepsilon)-af\|_p\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon t)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}|\varphi(t)|dt.$$

由 f 的 L^p 积分连续性以及 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|(f*\varphi_\varepsilon)-af\|_p\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-\varepsilon t)-f(x)|^p dx\right)^{1/p}|\varphi(t)|dt=0.$$

如果 $f\in C_0(\mathbb{R}^n)$, 那么仍有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)-af(x)|\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to 0}|f(x-\varepsilon t)-f(x)||\varphi(t)|dt=0. \qquad \square$$

如果 $a=1$, 那么定理 1.3.1 给出了恒等逼近算子按 L^p 范数收敛的充分性条件. 下面我们讨论恒等逼近算子在点态意义下的收敛性问题.

定理 1.3.2 设 $\varphi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 令 $\psi(x)=\sup\limits_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|$, 对 $\varepsilon>0$, 令 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. 如 $\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f\in L^p(\mathbb{R}^n), 1\leqslant p\leqslant\infty$, 那么在 f 的 Lebesgue 点 x 处

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(f*\varphi_\varepsilon)(x)=f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx.$$

证明 由积分绝对连续性及 ψ 的可积性, 当 $r\to 0$ 及 $r\to\infty$ 时, 均有

$$\begin{aligned}\frac{v_n(2^n-1)}{2^n}r^n\psi_0(r) &\leqslant \int_{r/2}^{r}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\psi_0(s)s^{n-1}dx'\,ds\\ &=\int_{r/2\leqslant|x|\leqslant r}\psi(x)dx\to 0.\end{aligned}\tag{1.3.3}$$

(1.3.3) 表明, 当 $r\to 0$ 及 $r\to\infty$ 时, 均有 $r^n\psi_0(r)\to 0$. 这样, 存在 $A>0$, 使得对一切 $0<r<\infty$ 有 $r^n\psi_0(r)\leqslant A$. 任取 f 的 Lebesgue 点 x, 由定理 1.2.9, 对 $\forall\delta>0$, 存在 $\eta>0$, 使得当 $0<r\leqslant\eta$ 时

$$\frac{1}{r^n}\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|dt<\delta.\tag{1.3.4}$$

令 $g(s)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(x-st')-f(x)|dt'$ 及 $G(r)=\int_0^r s^{n-1}g(s)ds$. 那么 (1.3.4) 式等价于：当 $0<r\leqslant\eta$ 时

$$G(r)=\int_0^r\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(x-st')-f(x)|dt's^{n-1}ds=\int_{|t|<r}|f(x-t)-f(x)|dt<\delta r^n.$$

现任取 $\varepsilon>0$, 记 $a=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_\varepsilon(x)dx$. 由 (1.3.2) 有

$$\begin{aligned}|(f*\varphi_\varepsilon)(x)-af(x)| &\leqslant\left|\int_{|t|<\eta}[f(x-t)-f(x)]\varphi_\varepsilon(t)dt\right|\\ &\quad+\left|\int_{|t|\geqslant\eta}[f(x-t)-f(x)]\varphi_\varepsilon(t)dt\right|\\ &:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

先估计 I_1. 因为 $G(\eta)<\delta\eta^n$ 且 $\eta^n\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{\eta}{\varepsilon})\leqslant A$, 有

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant\int_{|t|<\eta}|f(x-t)-f(x)|\frac{1}{\varepsilon^n}\psi(\frac{t}{\varepsilon})dt\qquad(\text{因为 }|\varphi_\varepsilon(t)|\leqslant\psi_\varepsilon(t))\\ &=\int_0^\eta\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|f(x-st')-f(x)|\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{s}{\varepsilon})dt's^{n-1}ds\\ &=\int_0^\eta s^{n-1}g(s)\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{s}{\varepsilon})ds\\ &=G(s)\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{s}{\varepsilon})\Big|_0^\eta-\int_0^\eta G(s)d\big(\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{s}{\varepsilon})\big)\\ &\leqslant\delta\eta^n\varepsilon^{-n}\psi_0(\frac{\eta}{\varepsilon})-\int_0^{\eta/\varepsilon}G(\varepsilon s)\varepsilon^{-n}d\psi_0(s)\\ &\leqslant\delta A-\int_0^{\eta/\varepsilon}\delta(\varepsilon s)^n\varepsilon^{-n}d\psi_0(s)\\ &\leqslant\delta\Big(A-\int_0^\infty s^nd\psi_0(s)\Big).\end{aligned}$$

注意到当 $s \to 0$ 及 $s \to \infty$ 时, 均有 $s^n\psi_0(s) \to 0$, 应用 Lebesgue-Stieltjes 积分的分部积分法,

$$-\int_0^\infty s^n d\psi_0(s) = n\int_0^\infty s^{n-1}\psi_0(s)ds = \frac{n}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx,$$

这里 (以及下面) ω_{n-1} 为 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$的面积, 故 $\omega_{n-1} = nv_n$. 这样, 存在常数 B (与 ψ 有关) 使得 $I_1 \leqslant \delta B$.

关于 I_2. 令 $\chi_\eta(x)$ 为 $\{x : |x| \geqslant \eta\}$ 的特征函数, 则

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \int_{|t|\geqslant\eta} |f(x-t)|\psi_\varepsilon(t)dt + \int_{|t|\geqslant\eta} |f(x)|\psi_\varepsilon(t)dt \\ &\leqslant \|f\|_p \cdot \|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_{p'} + |f(x)| \cdot \|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_1. \end{aligned}$$

由 ψ 的可积性知, 当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_1 = \int_{|t|\geqslant\eta} \psi_\varepsilon(x)dx = \int_{|t|\geqslant\eta/\varepsilon} \psi(x)dx \to 0.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} \|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_{p'} &= \left(\int_{|t|\geqslant\eta} \big(\psi_\varepsilon(x)\big)^{p'} dx\right)^{1/p'} \\ &= \left(\int_{|t|\geqslant\eta} \psi_\varepsilon(x) \cdot \big(\psi_\varepsilon(x)\big)^{p'/p} dx\right)^{1/p'} \\ &\leqslant \|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_\infty^{1/p} \cdot \|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_1^{1/p'}. \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \to 0$ 时

$$\|\chi_\eta \cdot \psi_\varepsilon\|_\infty = \sup_{|x|\geqslant\eta} \psi_\varepsilon(x) = \sup_{|x|\geqslant\eta} \varepsilon^{-n}\psi(x/\varepsilon) = \eta^{-n}(\eta/\varepsilon)^n\psi(\eta/\varepsilon) \to 0.$$

这样

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |(f * \varphi_\varepsilon)(x) - af(x)| \leqslant \delta B'.$$

再由 $\delta > 0$ 的任意性, 知定理结论成立. □

[注 1.3.1] (a) 如果 $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, 那么定理 1.3.2 给出了恒等逼近算子在点态意义下收敛的充分性条件.

(b) 由上面 I_1 和 I_2 的估计过程可知, 在定理的条件下, 如 x_0 为 f 的 Lebesgue 点, 那么

$$\lim_{y\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x_0 - t) - f(x_0)||\varphi_y(t)|dt = 0.$$

(c) 如对任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 当 $|x| = |y|$ 时, 有 $\psi(x) = \psi(y)$, 则称 ψ 为径向函数. 定理 1.3.2 中定义的函数 ψ 也称为 φ 的递减径向控制函数.

§1.3.2 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分

现在介绍两个非常重要的恒等逼近算子: Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分.

定义 1.3.2 称 $P(x) = c_n \dfrac{1}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}}$ 为 Poisson 核, 其中 $c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}$; $W(x) = e^{-\pi|x|^2}$ 为 Gauss-Weierstrass 核.
对 $\varepsilon > 0$, 习惯上也称 $P_\varepsilon(x) =: c_n \dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}$ 为 Poisson 核;
$W(x,\varepsilon) =: W_{\sqrt{4\pi\varepsilon}}(x) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/4\varepsilon}$ 为 Gauss-Weierstrass 核.

命题 1.3.3 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 均有

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} W(x,\varepsilon)dx = 1. \tag{1.3.5}$$

证明 通过变量替换可以将 (1.3.5) 的证明归结为 $\varepsilon = 1$ 的情形. 而由概率积分知

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x,1)dx = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/4} dt\right)^n = 1.$$

另一方面, 注意到 $\frac{1}{c_n} = \frac{\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球面 $\mathbb{S}^n$ 面积 ω_n 的一半, 因此只需验证

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} = \frac{\omega_n}{2}$$

即可. 而

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} dr dx' \\
&= \omega_{n-1} \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+1)/2}} dr \\
&= \omega_{n-1} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}\theta d\theta \qquad (r = \tan\theta) \\
&= \omega_n/2.
\end{aligned}$$

这里最后等式成立是因为 $\omega_{n-1}\sin^{n-1}\theta$ 是用超平面 $x_n = \cos\theta$ 去截 $\mathbb{S}^n$ 得到的半径为 $\sin\theta$ 的球面面积, 而 $\mathbb{S}^n$ 的上半部分的面积恰好是 $\omega_{n-1}\sin^{n-1}\theta$ 关于 θ 从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的积分. □

定义 1.3.3 对于 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 及 $\varepsilon > 0$, 分别称

$$u(x,\varepsilon) = (f * P_\varepsilon)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) P_\varepsilon(x-t)dt$$

及

$$S(x,\varepsilon) = [(f * W(\cdot,\varepsilon)](x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) W(x-t,\varepsilon)dt$$

为 f 的 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分.

由命题 1.3.3 并运用定理 1.1.2, 定理 1.3.1, 定理 1.3.2 即可得下面 Poisson 积分及 Gauss-Weierstrass 积分的重要性质:

推论 1.3.4 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 则 f 的 Poisson 积分 u 和 Gauss-Weierstrass 积分 S 满足如下性质:

(a) 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $u(\cdot,\varepsilon)$, $S(\cdot,\varepsilon) \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|u(\cdot,\varepsilon)\|_p \leqslant \|f\|_p, \quad \|S(\cdot,\varepsilon)\|_p \leqslant \|f\|_p;$$

(b) 对 $1 \leqslant p < \infty$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|u(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot)\|_p = \lim_{\varepsilon\to 0} \|S(\cdot,\varepsilon) - f(\cdot)\|_p = 0;$$

(c) 对 $1 \leqslant p \leqslant \infty$, 在 f 的 Lebesgue 点 x 处

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} S(x,\varepsilon).$$

如果加强 f 的条件, 那么推论 1.3.4(c) 对 $p = \infty$ 有如下结论:

推论 1.3.5 设 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 那么

(a) 如果 $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则当 $\varepsilon \to 0$ 时, $u(x,\varepsilon)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 的任一紧集 F 中一致收敛于 $f(x)$;

(b) 如果还有 $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 则当 $\varepsilon \to 0$ 时, $u(x,\varepsilon)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 $f(x)$;

(c) 如果 $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 当 $\varepsilon \to 0$, $u(x,\varepsilon)$ 弱 * 收敛于 f.

证明 (a) 因 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 由推论 1.3.4(c) 知 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(x,\varepsilon) = f(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上处处成立. 设 F 为 $\mathbb{R}^n$ 的任一紧集, 则 f 在 F 上一致连续. 即对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\eta_1 > 0$, 使得对 $\forall\, x \in F$, 当 $|t| < \eta_1$ 时,

$$|f(x-t) - f(x)| < \delta/2. \tag{1.3.6}$$

另一方面, 存在 $\eta_2 > 0$, 使得当 $0 < \varepsilon < \eta_2$ 时, 有

$$2\|f\|_\infty \cdot c_n\varepsilon \int_{|t|\geqslant\eta_1} \frac{dt}{|t|^{n+1}} < \delta/2. \tag{1.3.7}$$

因此由 (1.3.6) 和 (1.3.7),

$$\begin{aligned}|u(x,\varepsilon) - f(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-t) - f(x)|P_\varepsilon(t)dt \\ &\leqslant \int_{|t|<\eta_1} |f(x-t) - f(x)|P_\varepsilon(t)dt \\ &\quad + \int_{|t|\geqslant\eta_1} |f(x-t) - f(x)|P_\varepsilon(t)dt \\ &< \delta/2 + 2\|f\|_\infty \cdot c_n\varepsilon \int_{|t|\geqslant\eta_1} \frac{dt}{|t|^{n+1}} < \delta.\end{aligned}$$

因此当 $\varepsilon \to 0$ 时, u 在 F 上一致收敛于 f.

(b) 因 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, 从而 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续. 所以对任意的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, 当 $|t| < \eta$ 时, (1.3.6) 式仍成立. 由 (a) 的证明过程知当 $\varepsilon \to 0$ 时, u 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛于 f.

(c) $\forall\, \varphi \in L^1$, 记 $v(x,\varepsilon) = P_\varepsilon * \varphi(x)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\varepsilon)\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(x-t)f(t)dt\varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(t,\varepsilon)f(t)dt.$$

因此由推论 1.3.4(b)

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(x,\varepsilon)\varphi(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \\ &\qquad\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |v(t,\varepsilon) - \varphi(t)||f(t)|dt \\ &\qquad\leqslant \|f\|_\infty \|v(\cdot,\varepsilon) - \varphi(\cdot)\|_1 \to 0 \quad (\varepsilon \to 0).\end{aligned}$$

□

Hardy-Littlewood 极大算子 M 在分析中是极其重要的, 其重要性不仅体现于 M 在 Lebesgue 微分定理证明中所起的关键作用, 而且 M 可以点态地控制分析中如 Poisson 积分等一些非常重要的积分算子. 在给出上述结论之前，先给出径向极大函数的定义. 称

$$\mathbb{R}^{n+1}_+ =: \mathbb{R}^n \times (0,\infty) = \left\{(x,y) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; y > 0\right\}$$

为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的上半空间.

定义 1.3.4 对 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的可测函数 F, 其径向极大函数 F_+^* 定义为:

$$F_+^*(x) = \sup_{y>0} |F(x,y)|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

定理 1.3.6 设 φ 的递减径向控制函数 $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 则存在常数 C_n, 使得对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 及 $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{r>0} |(f * \varphi_r)(x)| \leqslant C_n \|\psi\|_1 \, Mf(x). \tag{1.3.8}$$

特别地, 对任一 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 其 Poisson 积分 u 和 Gauss-Weierstrass 积分 S 的径向极大函数 u_+^* 和 S_+^* 均被 Mf 点态控制. 即: 对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$

$$u_+^*(x) \leqslant C_n \, Mf(x) \qquad 且 \qquad S_+^*(x) \leqslant C_n' \, Mf(x). \tag{1.3.9}$$

证明 由递减径向控制函数的定义 (见 [注 1.3.1]), $\psi(x) = \sup\limits_{|t|\geqslant|x|} |\varphi(t)|$. 因此对任意的 $r > 0$, $|(f * \varphi_r)(x)| \leqslant (|f| * \psi_r)(x)$. 这样仅需证明对 $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sup_{r>0} (|f| * \psi_r)(x) \leqslant C_n \|\psi\|_1 \, Mf(x). \tag{1.3.10}$$

由于函数 ψ 是径向且递减, 故

$$\begin{aligned} \|\psi\|_1 = \frac{\omega_{n-1}}{r^n} \int_0^\infty \psi(\frac{s}{r}) s^{n-1} ds \quad &= \frac{\omega_{n-1}}{r^n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2^{k-1}}^{2^k} \psi(\frac{s}{r}) s^{n-1} ds \\ &\geqslant \omega_{n-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\frac{2^k}{r}) \frac{2^{nk} - 2^{n(k-1)}}{nr^n}. \end{aligned} \tag{1.3.11}$$

现回到 (1.3.10) 的证明. 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 运用 (1.3.11) 有

$$\begin{aligned} (|f| * \psi_r)(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-n} \int_{2^k < |t| \leqslant 2^{k+1}} |f(x-t)| \psi(\frac{t}{r}) dt \\ &\leqslant \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{-n} \psi(\frac{2^k}{r}) \int_{2^k < |t| \leqslant 2^{k+1}} |f(x-t)| dt \\ &\leqslant C_n \, Mf(x) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \psi(\frac{2^k}{r}) \frac{2^{nk} - 2^{n(k-1)}}{nr^n} \\ &\leqslant C_n \omega_{n-1}^{-1} \|\psi\|_1 \, Mf(x). \end{aligned}$$

现依次取 $\varphi=\psi$ 为 Poisson 核和 Gauss-Weierstrass 核, 那么由 (1.3.5) 和 (1.3.8) 知 (1.3.9) 成立. □

在一定条件下, 对于 Poisson 积分的径向极大函数 u_+^*, (1.3.9) 是可逆的.

定理 1.3.7 存在常数 C_n, 使得对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $f\geqslant 0$, 及 $x\in\mathbb{R}^n$

$$Mf(x)\leqslant C_n u_+^*(x). \tag{1.3.12}$$

证明 任意取定 $r>0$, 则

$$\begin{aligned}\sup_{\varepsilon>0}u(x,\varepsilon)\geqslant u(x,r)&=c_n\int_{\mathbb{R}^n}f(x-t)\frac{r}{(r^2+|t|^2)^{(n+1)/2}}dt\\&\geqslant c_n\int_{|t|\leqslant r}f(x-t)\frac{r}{(r^2+|t|^2)^{(n+1)/2}}dt\\&\geqslant C_n\cdot\frac{1}{r^n}\int_{|t|\leqslant r}f(x-t)dt.\end{aligned}$$

由 $r>0$ 的任意性即知 (1.3.12) 成立. □

下面将进一步说明, 极大算子 M 还能点态地控制 Poisson 积分的非切向极大函数.

定义 1.3.5 对 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $\alpha>0$, 称

$$\Gamma_\alpha(x)=\{(t,y)\in\mathbb{R}_+^{n+1}:|t-x|<\alpha y\}$$

为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中以 $(x,0)$ 为顶点, α 为锥度的锥. 简记 $\Gamma_1(x)$ 为 $\Gamma(x)$. 对 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的可测函数 F 及 $\alpha>0$, 其非切向极大函数 $F_{\nabla,\alpha}^*$ 定义为:

$$F_{\nabla,\alpha}^*(x)=\sup_{(t,y)\in\Gamma_\alpha(x)}|F(t,y)|,\qquad\forall\,x\in\mathbb{R}^n.$$

定义 1.3.6 设 F 为定义在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的可测函数. 如对 $\forall\,\alpha>0$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)\\(x,y)\to(x_0,0)}}F(x,y)=\ell,$$

则称 F 在 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 处有非切向极限 ℓ.

定理 1.3.8 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, u 为 f 的 Poisson 积分. 那么

(a) f 的 Poisson 积分的非切向极大函数被 f 的 Hardy-Littlewood 极大函数点态控制. 即：对 $\forall\,\alpha>0$,

$$u_{\nabla,\alpha}^*(x)\leqslant d_\alpha Mf(x),\qquad x\in\mathbb{R}^n. \tag{1.3.13}$$

(b) 在 f 的 Lebesgue 点 x_0 处, u 存在非切向极限 $f(x_0)$. 即对 $\forall\ \alpha>0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)\\(x,y)\to(x_0,0)}} u(x,y)=f(x_0). \tag{1.3.14}$$

因此, f 的 Poisson 积分的非切向极限在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处存在.

证明 (a) 对任意的 $\alpha>0$ 及 $(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)$,

$$|x_0-t|^2\leqslant(|x_0-x|+|x-t|)^2\leqslant(\alpha y+|x-t|)^2\leqslant 2[(\alpha y)^2+|x-t|^2].$$

如记 $d_\alpha=\big(\max\{1+2\alpha^2,2\}\big)^{(n+1)/2}$, 那么

$$P_y(x-t)\leqslant d_\alpha P_y(x_0-t). \tag{1.3.15}$$

这样由 (1.3.15) 和 (1.3.9)

$$\sup_{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)}|u(x,y)|\leqslant d_\alpha\sup_{y>0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)|P_y(x_0-t)dt\leqslant d_\alpha Mf(x_0).$$

(b) 由 [注 1.3.1(b)], 如 φ 的最小径向控制 $\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么在 f 的 Lebesgue 点 x_0 处, 有

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)-f(x_0)||\varphi_y(x_0-t)|dt=0. \tag{1.3.16}$$

现取 φ_y 为 Poisson 核 P_y, 由 (1.3.15) 和 (1.3.16)

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)\\(x,y)\to(x_0,0)}}|u(x,y)-f(x_0)| &\leqslant \lim_{\substack{(x,y)\in\Gamma_\alpha(x_0)\\(x,y)\to(x_0,0)}}\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)-f(x_0)|P_y(x-t)dt\\ &\leqslant d_\alpha\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}|f(t)-f(x_0)|P_y(x_0-t)dt=0.\end{aligned}$$

故 (1.3.14) 成立. □

由 (1.3.13), 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 和任意的 $\alpha>0$, $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数 Poisson 积分的非切向极大函数在 $\mathbb{R}^n$ 上是几乎处处有限的. 下面的结论是定理 1.3.7, 定理 1.3.8(a) 和定理 1.2.5, 定理 1.2.7 的直接结果.

推论 1.3.9 设 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 及 $\alpha>0$. 如视 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数 Poisson 积分的径向极大函数 u_+^* 和非切向极大函数 $u_{\nabla,\alpha}^*$ 为作用于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的算子, 那么 u_+^* 和 $u_{\nabla,\alpha}^*$ 均是 (p,p) 型 $(1<p\leqslant\infty)$ 和弱 $(1,1)$ 型的.

§1.4 算子内插定理

§1.4.1 Marcinkiewicz 算子内插定理

回顾在 Hardy-Littlewood 极大算子 M 为 (p,p) 型算子 (定理 1.2.7) 的证明中, 仅运用了 M 是次线性的, 弱 (1,1) 型以及 (∞,∞) 型算子, 并没有用到 M 的其他性质. 因此运用证明 (1.2.15) 的思想, 可以得到下面一般性的结论:

定理 1.4.1 设 T 为次线性算子. 如果 T 既是弱 $(1,1)$ 型的, 又是 (∞,∞) 型算子, 那么对 $1<p<\infty$, T 是 (p,p) 型算子.

定理 1.4.1 是下面定理的特殊情形.

定理 1.4.2 (Marcinkiewicz 算子内插定理) 设 T 为次线性算子. 如对于 $1\leqslant p_j\leqslant q_j\leqslant\infty$ $(j=0,1)$, $q_0\neq q_1$, T 为弱 (p_j,q_j) 型的 $(j=0,1)$, 那么对 $t\in(0,1)$ 且

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},$$

T 也是 (p,q) 型的, 且

$$\|T\|_{(p,q)}\leqslant C\|T\|_{w(p_0,q_0)}^{1-t}\|T\|_{w(p_1,q_1)}^{t},$$

其中, 常数 C 仅与 p_0,q_0,p_1,q_1 及 t 有关.

定理 1.4.2 的证明本质上与 (1.2.15) 的证明思想是相同的, 这里略去其证明.

§1.4.2 Riesz–Thörin 算子内插定理

定理 1.4.3 (Riesz–Thörin 算子内插定理) 设 T 为线性算子且对于 $1\leqslant p_j,q_j\leqslant\infty$ $(j=0,1)$, T 为 (p_j,q_j) 型的 $(j=0,1)$. 那么对 $t\in(0,1)$ 且

$$\frac{1}{p}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1},$$

T 也是 (p,q) 型的, 且

$$\|T\|_{(p,q)}\leqslant\|T\|_{(p_0,q_0)}^{1-t}\|T\|_{(p_1,q_1)}^{t}.$$

为证定理 1.4.3, 先证明一个引理.

引理 1.4.4 (Phragmen-Lindelöf 三线定理) 记

$$S=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:\ 0<x<1,\, y\in\mathbb{R}\}.$$

如复值函数 F 在闭包 $\bar{S}$ 上连续有界, 在 S 内解析, 且 F 满足

$$|F(iy)|\leqslant K_0,\quad |F(1+iy)|\leqslant K_1,\quad \forall\, y\in\mathbb{R},$$

则对 $\forall\, x+iy\in S$, $|F(x+iy)|\leqslant K_0^{1-x}K_1^{x}$.

证明 不妨设 K_0,K_1 均为正数. 记 $G(z)=F(z)K_0^{z-1}K_1^{-z}$, 那么只需说明, 若 G 在 $\bar{S}$ 上连续有界, 在 S 内解析, 且对 $\forall\, y\in\mathbb{R}$, 有 $|G(iy)|\leqslant 1$ 及 $|G(1+iy)|\leqslant 1$. 则

$$|G(x+iy)|\leqslant 1,\qquad \forall\, x+iy\in S. \tag{1.4.1}$$

首先说明 (1.4.1) 在下面条件下成立:

$$\lim_{|y|\to\infty}\max\Big\{|G(x+iy)|:\quad x\in[0,1]\Big\}=0. \tag{1.4.2}$$

事实上, 此时存在 $y_0>0$, 使得

$$\text{当}x\in[0,1],\ |y|\geqslant y_0\text{时},\quad |G(x+iy)|\leqslant 1. \tag{1.4.3}$$

这样在以 iy_0, $1+iy_0$, $1-iy_0$, $-iy_0$ 为顶点的矩形 Q 的边界 ∂Q 上有 $|G(z)|\leqslant 1$. 由此并运用解析函数最大模原理可知, 对 $z\in\bar{Q}$, $|G(z)|\leqslant 1$. 再结合 (1.4.3) 便知 (1.4.1) 成立. 对于一般情形, 只须将上述的结果应用于函数

$$G_m(z)=G(z)e^{\frac{(z^2-1)}{m}}\quad (m\in\mathbb{N})$$

上, 便得 $\forall\, z\in S$, $|G_m(z)|\leqslant 1$. 再令 $m\to\infty$, 就得到 (1.4.1) 式. □

定理 1.4.3 的证明 我们只对 $(p_0,p_1)\neq(\infty,\infty)$ 且 $(q_0,q_1)\neq(1,1)$ 的情形给出证明. 其他情形的证明是类似的. 首先证明定理的结论对简单函数成立. 记

$$\alpha_j=\frac{1}{p_j},\quad \beta_j=\frac{1}{q_j}\qquad (j=0,1);\quad \text{及}\quad \alpha=\frac{1}{p},\quad \beta=\frac{1}{q};$$

$$\alpha(z)=(1-z)\alpha_0+z\alpha_1,\quad \beta(z)=(1-z)\beta_0+z\beta_1.$$

那么

$$\alpha(j)=\alpha_j,\quad \beta(j)=\beta_j\qquad (j=0,1);\quad \alpha(t)=\alpha,\quad \beta(t)=\beta.$$

简记 $\|T\|_{(p_i,q_i)} = k_i, \quad i = 0, 1; \quad C = k_0^{1-t}k_1^t$. 因此需证明

$$\forall\, f \in D, \quad \|T(f)\|_q \leqslant C\|f\|_p,$$

其中 D 为一切可积简单函数的全体. 由 $L^q(\mathbb{R}^n)$ 中范数的表达式, 为证上式, 仅需说明

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} T(f)(u)g(u)\,du\right| \leqslant C, \quad \forall\, f, g \in D \text{ 满足 } \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1. \tag{1.4.4}$$

定义

$$f_z(u) = e^{i\arg f}|f(u)|^{\alpha(z)/\alpha}, \quad g_z(u) = e^{i\arg g}|g(u)|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)}$$

及

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} T(f_z)(u)g_z(u)\,du.$$

注意到 $f_t(u) = f(u)$ 且 $g_t(u) = g(u)$, 因此 (1.4.4) 式等价于

$$|F(t)| \leqslant C, \quad \forall\, f, g \in D \text{ 满足 } \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1. \tag{1.4.5}$$

由 $f, g \in D$, 可写 $f = \sum_{j=1}^n |c_j|e^{i\arg c_j}\chi_{E_j}$ 及 $g = \sum_{k=1}^m |d_k|e^{i\arg d_k}\chi_{F_k}$. 因此

$$F(z) = \sum_{j,k} |c_j|^{\alpha(z)/\alpha}|d_k|^{(1-\beta(z))/(1-\beta)}e^{i\arg(c_jd_k)}\int_{\mathbb{R}^n} T(\chi_{E_j})(u)\chi_{F_k}(u)du.$$

故 $F(z)$ 在 S 内解析且在 $\bar{S}$ 上有界连续. 由引理 1.4.4, 为证 (1.4.5) 式, 只须验证

$$|F(iy)| \leqslant k_0 \quad \text{及} \quad |F(1+iy)| \leqslant k_1.$$

事实上, 由 $\alpha(iy) = \alpha_0 + iy(\alpha_1 - \alpha_0)$ 及 $1 - \beta(iy) = (1-\beta_0) - iy(\beta_1 - \beta_0)$ 可知

$$|f_{iy}(u)|^{p_0} = \left|e^{i\arg f}|f(u)|^{\alpha(iy)/\alpha}\right|^{p_0} = \left||f(u)|^{iy(\alpha_1-\alpha_0)/\alpha}|f(u)|^{p/p_0}\right|^{p_0} = |f(u)|^p,$$

以及 $|g_{iy}(u)|^{q_0'} = |g(u)|^{q'}$. 于是, 由 T 为 (p_0, q_0) 型及 Hölder 不等式得

$$|F(iy)| \leqslant \|Tf_{iy}\|_{q_0}\|g_{iy}\|_{q_0'} \leqslant k_0\|f_{iy}\|_{p_0}\|g_{iy}\|_{q_0'} = k_0\|f\|_p^{p/p_0}\|g\|_{q'}^{q'/q_0'} = k_0.$$

同理可知 $|F(1+iy)| \leqslant k_1$. 从而 (1.4.5) 成立. 这样对简单函数证明了定理的结论. 现考虑一般的 L^p 函数 f. 不妨认为 $p_0 \leqslant p_1$. 定义

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 1\}, \quad f^0 = f\chi_E \quad \text{及} \quad f^1 = f\chi_{E^c}.$$

显然, $f=f^0+f^1$, 且 $f^0\in L^{p_0}\cap L^p$, $f^1\in L^{p_1}\cap L^p$. 取 $g_m\in D$, $m\in\mathbb{N}$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\|g_m-f^0\|_p=0;\quad g_m=g_m\chi_E.$$

同时取 $h_m\in D$, $m\in\mathbb{N}$, 使得

$$\lim_{m\to\infty}\|h_m-f^1\|_p=0;\quad h_m=h_m\chi_{E^c},\ h_mf^1\geqslant 0.$$

由

$$\|g_m-f^0\|_{p_0}\leqslant |E|^{1/p_0-1/p}\|g_m-f^0\|_p;\quad \|h_m-f^1\|_{p_1}\leqslant\Big(\|h_m-f^1\|_p\Big)^{p/p_1}$$

及 T 的 (p_0,q_0), (p_1,q_1) 有界性得

$$\lim_{m\to\infty}\Big(\|T(g_m-f^0)\|_{q_0}+\|T(h_m-f^1)\|_{q_1}\Big)=0.$$

于是, $\{g_m\}$ 含有子列 $\{g_{m_j}\}$, 满足

$$\text{对于几乎每个 } x\in\mathbb{R}^n,\quad \lim_{j\to\infty}|T(g_{m_j})(x)-T(f^0)(x)|=0.$$

同样地, 在 $\{h_{m_j}\}$ 中含有子列, 记之为 $\{h_k\}$, 满足

$$\text{对于几乎每个 } x\in\mathbb{R}^n,\quad \lim_{k\to\infty}|T(h_k)(x)-T(f^1)(x)|=0.$$

现记 $f_k=g_k+h_k$, 由 T 的线性性质,

$$\text{对于几乎每个 } x\in\mathbb{R}^n,\quad \lim_{k\to\infty}|T(f_k)(x)-T(f)(x)|=0.$$

同时, 显然有

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=\lim_{k\to\infty}\left(\|g_k-f^0\|_p^p+\|h_k-f^1\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}=0.$$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k\|_p=\|f\|_p$. 根据假定,

$$\|T(f_k)\|_q\leqslant C\|f_k\|p,\quad k\in\mathbb{N}.$$

那么, 由 Fatou 定理得到

$$\|T(f)\|_q\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\|T(f_k)\|_q\leqslant\varliminf_{k\to\infty}C\|f_k\|_p=C\|f\|_p.$$ □

[注 1.4.1] 定理 1.4.2 和定理 1.4.3 的结论是不可比较的. 一方面, 定理 1.4.2 中 T 为次线性算子并且在端点仅要求 T 的弱有界性, 而定理 1.4.3 中 T 为线性算子 (对次线性算子也成立, 见下面定理 1.4.5) 但要求 T 在端点的强有界性. 另一方面, 定理 1.4.2 中有 $p_j\leqslant q_j$ 的限制, 而定理 1.4.3 则无此限制.

§1.4.3 算子内插定理的几个常用推广 *

这里介绍几个常用的算子内插定理的推广. 1956 年, A. Calderón 和 A. Zygmund 运用 Phragmen-Lindelöf 三线定理 (引理 1.4.4) 和次调和函数的性质将 Riesz-Thörin 算子内插定理 中 "T 为线性算子" 的条件减弱为 T 为次线性算子. 他们得到下面的结论:

定理 1.4.5 设 T 为次线性算子且对于 $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$ $(j=0,1)$, T 为 (p_j, q_j) 型的 $(j=0,1)$. 那么对 $t \in (0,1)$ 且

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1},$$

T 也是 (p,q) 型的, 且

$$\|T\|_{(p,q)} \leqslant \|T\|_{(p_0,q_0)}^{1-t} \|T\|_{(p_1,q_1)}^{t}.$$

在 1958 年, E. M. Stein 和 G. Weiss 将定理 1.4.5 推广至加权的情形.

定理 1.4.6 (Stein-Weiss 变测度算子内插定理) 设 T 为次线性算子, u_0, v_0, u_1, v_1 是正值权函数, $1 < p_0, p_1, q_0, q_1 < \infty$, 且 $p_0 \neq p_1, q_0 \neq q_1$. 如 T 满足

$$\|Tf\|_{p_0,u_0} \leqslant C_0 \|f\|_{q_0,v_0} \quad 及 \quad \|Tf\|_{p_1,u_1} \leqslant C_1 \|f\|_{p_1,v_1},$$

其中 $\|g\|_{r,w} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^r w(x) dx \right)^{1/r}$ 记加权空间 $L^r(\mathbb{R}^n, wdx)$ 上的范数. 那么对 $t \in (0,1)$ 及

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1},$$

有

$$\|Tf\|_{p,u} \leqslant C \|f\|_{q,v},$$

这里 $u = u_0^{p(1-t)/p_0} u_1^{pt/p_1}$, $\quad v = v_0^{q(1-t)/q_0} v_1^{qt/q_1}$ 且 $C \leqslant C_0^{1-t} C_1^t$.

下面结果表明, Marcinkiewicz 算子内插定理 和 Riesz-Thörin 算子内插定理条件中的端点空间的有界性可以减弱.

定理 1.4.7 设 T 为次线性算子. 如果 T 为弱 (p_0, p_0) $(1 < p_0 \leqslant \infty)$ 型的, 且是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到弱 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 那么对于 $1 < p < p_0$, T 为 (p,p) 型算子.

定理 1.4.8 设 T 为线性算子. 如果 T 为 (p_0, p_0) $(1 \leqslant p_0 < \infty)$ 型算子, 且是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 有界的, 那么对于 $p_0 < p < \infty$, T 为 (p,p) 型算子.

[注 1.4.2] 定理 1.4.7 中 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上的实 Hardy 空间. $H^1(\mathbb{R}^n)$ 和定理 1.4.8 中所提到的 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 空间的定义可见第五章中 §5.2.4.

习 题 一

1. 证明命题 1.1.3 的结论.

2. 设

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

证明：$\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3. 证明命题 1.2.1 的结论.

4. 证明: 对任意的 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 只要 $\|f\|_1>0$, 必定 $Mf\notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

5. 设 $\varepsilon>0$ 且 $f\in L^p(\mathbb{R})\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 算子 T 定义为

$$Tf(x)=\int_{|x-y|>1}\frac{f(y)}{|x-y|^{n+\varepsilon}}dy.$$

证明：T 为弱 (1,1) 型和 (p,p) 型算子 $(1<p\leqslant\infty)$.

6. 设

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

证明：$x=0$ 不是 f 的 Lebesgue 点.

7. 证明：如下定义的强极大算子 M_s 为 (p,p) $(1<p\leqslant\infty)$ 型的.

$$M_sf(x_1,x_2)=\sup_{\substack{R\in\mathscr{R}_1\\ R\ni(x_1,x_2)}}\frac{1}{|R|}\int_R|f(y_1,y_2)|dy_1\,dy_2,$$

其中 $\mathscr{R}_1=\{\mathbb{R}^2$上所有边与坐标轴平行的矩形$\}$.

第二章　FOURIER 变换

§2.1　Fourier 变换的 L^1 理论

§2.1.1　Fourier 变换的基本性质

定义 2.1.1 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 称

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt$$

为 f 的 Fourier 变换.

定理 2.1.1 Fourier 变换有如下基本性质:

(a) Fourier 变换是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 有界线性算子;

(b) 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\hat{f}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续;

(c) (Riemann-Lebesgue 引理) 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

证明 (a) 显然成立. 关于 (b), 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 及 $h \in \mathbb{R}^n$, 应用 Lebesgue 控制收敛定理

$$\begin{aligned} |\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)||e^{-2\pi i h \cdot t} - 1| dt \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)||2\sin(\pi h \cdot t)| dt \to 0 \quad (|h| \to 0). \end{aligned}$$

注意到上面最后的表达式已与 x 无关. 现考虑 (c). 由结论 (b), 只需证明

$$\lim_{|x| \to \infty} \hat{f}(x) = 0.$$

记 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的区间. 那么

$$\widehat{\chi_I}(x) = \int_{a_1}^{b_1} e^{-2\pi i x_1 t_1} dt_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} e^{-2\pi i x_n t_n} dt_n.$$

当 $|x| \to \infty$ 时, 至少存在 $1 \leqslant j \leqslant n$, 使得 $|x_j| \to \infty$. 简单计算可知

$$\lim_{|x| \to \infty} \widehat{\chi_I}(x) = 0.$$

进而可知, 结论 (c) 对 $\mathbb{R}^n$ 中的简单函数仍然成立. 现考虑一般的 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 f. 由于简单函数的全体在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 因此对 $\forall\varepsilon>0$, 存在简单函数 g 使得 $\|f-g\|_1<\varepsilon/2$, 且对充分大的 $|x|$, $|\hat{g}(x)|<\varepsilon/2$. 因此对充分大的 $|x|$, 由结论 (a) 我们有

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x)| &\leqslant |\hat{f}(x)-\hat{g}(x)|+|\hat{g}(x)|\\ &=|\widehat{(f-g)}(x)|+|\hat{g}(x)|\leqslant \|f-g\|_1+|\hat{g}(x)|<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

下面给出一个 $C_0(\mathbb{R})$ 函数不是 $L^1(\mathbb{R})$ 函数 Fourier 变换的例子, 它表明定理 2.1.1 中结论 (c) 的逆是不成立的. 首先说明一个事实: 如 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\hat{f}$ 为奇函数, 则极限

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{\hat{f}(t)}{t}dt$$

存在且有限. 事实上, 因 $\hat{f}$ 为奇函数, 故

$$\begin{aligned}\hat{f}(t)&=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)[e^{-2\pi ixt}-e^{2\pi ixt}]dx\\ &=-i\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(2\pi xt)dx\\ &=i\int_{\mathbb{R}} f(-x)\sin(2\pi xt)dx.\end{aligned}$$

因此有

$$2\hat{f}(t)=\int_{\mathbb{R}}[if(-x)-if(x)]\sin(2\pi xt)dx.$$

令

$$F(x)=\frac{if(-x)-if(x)}{2},$$

那么

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^N \frac{\hat{f}(t)}{t}dt&=\int_\varepsilon^N \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbb{R}} F(x)\sin(2\pi xt)dx\right)dt\\ &=\int_{\mathbb{R}} F(x)\left(\int_{2\pi\varepsilon x}^{2\pi Nx}\frac{\sin t}{t}dt\right)dx.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{2\pi\varepsilon x}^{2\pi Nx}\frac{\sin t}{t}dt\longrightarrow\frac{\pi}{2}\qquad(\varepsilon\to 0,\quad N\to\infty),$$

由上式及 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{\hat{f}(t)}{t}dt=\frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{R}}F(x)dx<\infty.$$

现取

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\log x}, & x>e,\\ xe^{-1}, & -e\leqslant x\leqslant e,\\ -\dfrac{1}{\log(-x)}, & x<-e.\end{cases}$$

那么 $g\in C_0(\mathbb{R})$ 且 g 为奇函数. 由于

$$\lim_{N\to\infty}\int_e^N \frac{g(t)}{t}dt=\lim_{N\to\infty}\int_e^N\frac{dt}{t\log t}=\lim_{N\to\infty}\log(\log N)=\infty,$$

因此由上述事实可知 g 不是任何 $L^1(\mathbb{R})$ 函数 Fourier 变换.

[注 2.1.1] 容易证明, 集 $K=\{\varphi:\quad \varphi=\hat{f}$ 且 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ 是 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的稠密子空间.

定理 2.1.2 (卷积及平移与 Fourier 变换的关系) 如 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么

(a) $\widehat{(f*g)}(x)=\hat{f}(x)\cdot\hat{g}(x)$;

(b) 设 $h\in\mathbb{R}^n$, 平移 τ_h 定义为 $\tau_h f(x)=f(x-h)$, $x\in\mathbb{R}^n$. 那么

$$(\tau_h f)^\wedge(x)=e^{-2\pi i x\cdot h}\hat{f}(x)\quad 且\quad \tau_h\hat{f}(x)=\big(e^{2\pi i(\cdot)\cdot h}f(\cdot)\big)^\wedge(x);$$

证明 略. □

定理 2.1.3 (线性变换与 Fourier 变换的关系) 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么

(a) 设 T 为可逆线性变换. 仍用 T 记其矩阵, T^t 为其转置矩阵, $\det(T)$ 为 T 的行列式. 那么 $\widehat{f(T\cdot)}(x)=|\det(T)|^{-1}\hat{f}(T^{-t}x)$;

(b) 对 $a\neq 0$ 和可测函数 f, 伸缩变换 η_a定义为: $\eta_a f(x)=f(ax)$. 那么 $\widehat{\eta_a f(\cdot)}(x)=\frac{1}{|a|^n}\eta_{a^{-1}}\hat{f}(x)$;

(c) $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换与正交变换可交换;

(d) $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中径向函数的 Fourier 变换仍为径向函数.

证明 (a) 只需注意到, 对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(T(y))e^{-2\pi i x\cdot y}dy=|\det(T)|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}f(u)e^{-2\pi i x\cdot T^{-1}u}du$$

$$=|\det(T)|^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}f(u)e^{-2\pi i T^{-t}x\cdot u}du.$$

(b) 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 令 $Tx = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_n)$ 并运用结论 (a) 即可.

(c) 对 $\mathbb{R}^n$ 上任一正交变换 $\mathcal{O}$, 均有 $|\det(\mathcal{O})| = 1$ 且 $\mathcal{O}^{-1} = \mathcal{O}^t$. 由 (a) 知结论 (c) 成立.

(d) 因 f 为径向函数当且仅当对 $\mathbb{R}^n$ 中任一旋转 ρ 及 $x \in \mathbb{R}^n$, $f(\rho x) = f(x)$. 由结论 (c) 便可得. □

下面我们将考虑 Fourier 变换与微分的关系. 先引进按 L^p 范数可导的概念. 设 $1 \leqslant p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 如存在 $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 使得对 $h = (0, \cdots, h_k, \cdots, 0)$ 有

$$\lim_{h_k \to 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right|^p dx \right)^{1/p} = 0, \tag{2.1.1}$$

则说 f 按 L^p 范数关于 x_k 可导, 且 g 称为 f 按 L^p 范数关于 x_k 的偏导数. 显然, 如果 f 按 L^p 范数关于 x_k 可导, 那么在 a.e. 意义下, 其按 L^p 范数关于 x_k 的偏导数是唯一的.

定理 2.1.4 (微分与 Fourier 变换的关系) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) 如 $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么 $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}$ 存在, 且 $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = \big(-2\pi i t_k f(\cdot)\big)^\wedge(x)$;

(b) 如 g 为 f 按 L^1 范数关于 x_k 的偏导数. 那么 $\hat{g}(x) = 2\pi i x_k \hat{f}(x)$. 特别地, 如果 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\frac{\partial f}{\partial t_k} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么 $(\frac{\partial f}{\partial t_k})^\wedge(x) = 2\pi i x_k \hat{f}(x)$.

证明 (a) 设 $h = (0, \cdots, 0, h_k, 0 \cdots, 0)$. 对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_k}[\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)] &= \frac{1}{h_k}[\tau_{-h}\hat{f}(x) - \hat{f}(x)] \\ &= \left[\frac{e^{-2\pi i(\cdot)\cdot h} - 1}{h_k} f(\cdot)\right]^\wedge (x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) \frac{e^{-2\pi i t\cdot h} - 1}{h_k} e^{-2\pi i x\cdot t} dt. \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

由于

$$\left| \frac{e^{-2\pi i t\cdot h} - 1}{h_k} \right| \leqslant \frac{|2\pi t \cdot h|}{|h_k|} = 2\pi |t_k|,$$

及 (2.1.2) 并运用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) &= \lim_{h_k \to 0} \frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x\cdot t} (-2\pi i t_k) dt \\ &= \big(-2\pi i t_k f(\cdot)\big)^\wedge (x). \end{aligned}$$

(b) 首先注意到

$$\begin{aligned}\left|\hat{g}(x)-\frac{e^{2\pi ix\cdot h}-1}{h_k}\hat{f}(x)\right| &= \left|\left(g(\cdot)-\frac{f(\cdot+h)-f(\cdot)}{h_k}\right)^{\wedge}(x)\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left|g(t)-\frac{f(t+h)-f(t)}{h_k}\right|dt.\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

因为 g 为 f 按 L^1 范数关于 x_k 的偏导数, 由 (2.1.1) 和 (2.1.3)

$$\lim_{h_k\to 0}\left|\hat{g}(x)-\frac{e^{2\pi ix\cdot h}-1}{h_k}\hat{f}(x)\right| \leqslant \lim_{h_k\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\left|g(t)-\frac{f(t+h)-f(t)}{h_k}\right|dt=0.$$

这样,

$$\lim_{h_k\to 0}\frac{e^{2\pi ix\cdot h}-1}{h_k}\hat{f}(x)=\hat{g}(x).$$

即有 $\hat{g}(x)=2\pi ix_k\hat{f}(x)$. 如果 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 存在且 $\frac{\partial f}{\partial x_k}\in L^1$, 则 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 也是 f 按 L^1 范数关于 x_k 的偏导数. 此时便有 $(\frac{\partial f}{\partial t_k})^{\wedge}(x)=2\pi ix_k\hat{f}(x)$. □

[注 2.1.2] 设 $m\in\mathbb{N}$, $P(x)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha x^\alpha$ 为 m 次 n 元多项式. 由定理 2.1.4 即可推出如下结论:

$$\begin{aligned}P(D)\hat{f}(x) &= \big(P(-2\pi it)f(t)\big)^{\wedge}(x), \\ \big(P(D)f\big)^{\wedge}(x) &= P(2\pi ix)\hat{f}(x),\end{aligned}$$

这里假定 $f(t)\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $P(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha$ 且上面等式两边都是有意义的.

下面的结论是常用的, 其证明应用 Fubini 定理即可.

命题 2.1.5 (乘法公式) 如 $f,g\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)dx. \tag{2.1.4}$$

在本段的最后, 我们给出 Fourier 变换一个非常重要的特性:

定理 2.1.6 不存在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中函数 f, 使得 $\|f\|_1>0$ 且 $\mathrm{supp}f$ 和 $\mathrm{supp}\hat{f}$ 同时为紧集.

证明 用反证法. 设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 满足 $\|f\|_1>0$ 且 $\mathrm{supp}f$ 和 $\mathrm{supp}\hat{f}$ 均为紧集. 那么对 $\mathbb{C}$ 平面中的点 $z=x+iy$, 令

$$F(z)=F(x+iy)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi i(x+iy)t}f(t)dt.$$

由 f 具有紧支集可知 F 为 $\mathbb{C}$ 中的非零整函数. 另一方面, 由于 $\operatorname{supp}\hat{f}$ 为紧集, 因此 F 必然在实轴的一个正测度子集上为零. 但此与非零整函数的零点孤立性相矛盾. □

§2.1.2 Fourier 积分的平均与 Fourier 变换的反演

由前面的讨论知道, $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 f 的 Fourier 变换 $\hat{f}$ 总存在. 一个自然的问题是, 对于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 f, 下面的表达式

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x\cdot t} dt \tag{2.1.5}$$

是否成立? 此即 Fourier 变换的反演问题. 先看一个例子. 令

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2\pi t}, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

那么 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 且 $\hat{f}(x) = \frac{1}{2\pi(1+ix)}$. 此例表明, $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换可能在 $\mathbb{R}^n$ 上不可积. 或者说 (2.1.5) 式的右边甚至可能不存在. 因此一个首要问题是: $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 f 应满足什么条件, 使得 (2.1.5) 式的右边在 a.e. 意义下存在? 对 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 f, 称 (2.1.5) 式右边的形式积分为 f 的 Fourier 积分. 在这一节我们将运用恒等逼近算子的收敛性来研究 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 Fourier 积分的求和问题, 进而解决 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 Fourier 变换的反演问题.

定义 2.1.2 设 $\Phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Phi(0) = 1$. 对 $\varepsilon > 0$, 称

$$M_{\varepsilon,\Phi}(h) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\Phi(\varepsilon x) dx$$

为积分 $\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx$ 的 Φ 平均或 Φ 求和.

下面结果表明, 如果 Φ 满足一定的条件, 那么 f 的 Fourier 积分的 Φ 平均是 f 的卷积.

定理 2.1.7 如 $f, \Phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\varphi(x) = \hat{\Phi}(x)$. 那么对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot t} \Phi(\varepsilon x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t) dx = (f * \tilde{\varphi}_\varepsilon)(t), \tag{2.1.6}$$

这里 $\tilde{g}(x) = g(-x)$ 称为 g 的反射.

证明 应用乘法公式 (2.1.4), 定理 2.1.2(b) 及定理 2.1.3(b) 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot t}\Phi(\varepsilon x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[e^{2\pi i(\cdot)\cdot t}\Phi(\varepsilon\cdot)\right]^\wedge(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left[\tau_t\widehat{\Phi(\varepsilon\cdot)}(x)\right]dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_\varepsilon(x-t)dx.\end{aligned}$$

□

由 (2.1.6), 并运用定理 1.3.1 和定理 1.3.2 即有下面的

推论 2.1.8 设 $f, \Phi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\varphi=\hat{\Phi}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$. 则

(a) f 的 Fourier 积分的 Φ 平均在 L^1 范数意义下收敛到 f. 即:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot(\cdot)}\Phi(\varepsilon x)dx - f(\cdot)\right\|_1 = 0;$$

(b) 如果 φ 的递减径向控制函数 $\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 f 的 Fourier 积分的 Φ 平均在 a.e. 意义下收敛到 f. 即:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot t}\Phi(\varepsilon x)dx - f(t)\right| = 0 \quad \text{a.e.} \quad t\in\mathbb{R}^n.$$

现给出 f 的 Fourier 积分 Φ 平均的两个重要的特例: f 的 Fourier 积分的 Abel 平均及 Gauss 平均, 它们分别联系着 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分. 先给出一个命题.

命题 2.1.9 设 $\varepsilon>0$, 那么

(a) $\left(e^{-4\pi^2\varepsilon|\cdot|^2}\right)^\wedge(x) = W(x,\varepsilon)$;

(b) $\left(e^{-2\pi\varepsilon|\cdot|}\right)^\wedge(x) = c_n\dfrac{\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)^{(n+1)/2}} = P_\varepsilon(x)$.

证明 (a) 只需验证 $\left(e^{-\pi|\cdot|^2}\right)^\wedge(x) = e^{-\pi|x|^2}$. 而此问题可归结为一维的情形. 易知 $f(x)=e^{-\pi x^2}$ 是微分方程

$$u'+2\pi xu=0, \quad u(0)=1$$

的特解. 然而 $\hat{f}$ 也满足上面的方程. 事实上,

$$(\hat{f})'(x) = (-2\pi itf(t))^\wedge(x) = (if')^\wedge(x) = i2\pi ix\hat{f}(x) = -2\pi x\hat{f}(x).$$

因此, $(\hat{f})'+2\pi x\hat{f}=0$. 又

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2}dt = 1.$$

这样, 由方程解的唯一性知 $\hat{f} = f$.

(b) 只需考虑 $\varepsilon = 1$ 的情形. 设 $\phi(x) = e^{-2\pi|x|}$, 下证 $\widehat{\phi}(x) = P(x)$. 需用到恒等式

$$e^{-t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\frac{t^2}{4u}} du, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.1.7}$$

恒等式 (2.1.7) 可由对函数 $\varphi(z) = \frac{1}{1+z^2} e^{itz}$ 在复平面上以原点为中心, $R\,(R > 1)$ 为半径的上半圆周上做围道积分并运用留数定理而得到. 于是, 由 (2.1.7) 及结论 (a),

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi|y|} e^{-2\pi i x\cdot y} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} e^{-\pi^2 \frac{|y|^2}{u}} du \right\} e^{-2\pi i x\cdot y} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi^2 \frac{|y|^2}{u}} e^{-2\pi i x\cdot y} dy \right\} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \left(\frac{\pi}{u}\right)^{-\frac{n}{2}} e^{-u|x|^2} du \\
&= \frac{1}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} e^{-s} ds \\
&= P(x).
\end{aligned}$$

□

现分别取 $\Phi(x) = e^{-|x|}$ 及 $\Phi(x) = e^{-|x|^2}$, 其相应的 Φ 平均分别称为 f 的 Fourier 积分的 Abel 平均及 Gauss 平均. 由命题 2.1.9 及 (2.1.5) 知, 它们实际上分别为 f 的 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分.

定理 2.1.10 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 f 的 Fourier 积分的 Abel 平均与 Gauss 平均分别是 f 的 Poisson 积分和 Gauss-Weierstrass 积分. 即对 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot t} e^{-2\pi\varepsilon|x|} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) P_\varepsilon(x-t) dx = u(t,\varepsilon) \tag{2.1.8}$$

及

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i x\cdot t} e^{-4\pi^2\varepsilon|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) W(x-t,\varepsilon) dx = S(t,\varepsilon). \tag{2.1.9}$$

作为定理 2.1.10, 定理 1.3.1 和定理 1.3.2 的直接结果可以得到 L^1 函数的 Fourier 积分的 Abel 平均与 Gauss 平均在 L^1 范数及几乎处处意义下的收敛性.

推论 2.1.11 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么 f 的 Fourier 积分的 Abel 平均与 Gauss 平均在 L^1 范数及几乎处处意义下均收敛到 f.

下面我们讨论, 在什么条件下 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数 f 的 Fourier 积分 a.e. 等于 f? 即所谓 Fourier 变换的反演问题.

定理 2.1.12 如果 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt, \qquad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

特别地, 上式在 f 的 Lebesgue 点处成立.

证明 由推论 2.1.11 知对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} S(x,\varepsilon) = f(x)$. 另一方面, 由 (2.1.9)

$$\lim_{\varepsilon \to 0} S(x,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} e^{-4\pi^2 \varepsilon |t|^2} dt.$$

因 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} S(x,\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} \lim_{\varepsilon \to 0} e^{-4\pi^2 \varepsilon |t|^2} dt = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt. \qquad \square$$

[注 2.1.3] 如果 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 f 连续, 则定理 2.1.12 的结论处处成立.

[注 2.1.4] 由于 $\left(e^{-2\pi\varepsilon|\cdot|}\right)^{\wedge}(x) = P_\varepsilon(x)$, 由 [注 2.1.3] 知

$$e^{-2\pi\varepsilon|x|} = \int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt$$

处处成立. 令 $x = 0$, 则有 $\int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(t) dt = 1$. 同时, 由于

$$e^{-2\pi\varepsilon|x|} = \int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(t) e^{-2\pi i x \cdot (-t)} dt = \int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(-t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt,$$

因此得到 $\widehat{P_\varepsilon(\cdot)}(x) = e^{-2\pi\varepsilon|x|}$.

定理 2.1.13 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 如果 $\hat{f}(x) \geqslant 0$, 且 f 在 $x = 0$ 处连续, 那么 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由此得

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) e^{2\pi i x \cdot t} dx \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

特别地, $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) dx = f(0)$.

证明 首先, 由乘法公式 (2.1.4) 和推论 1.3.4(c) 并注意到 f 在 $x=0$ 处连续, 有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)e^{-2\pi\varepsilon|t|}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}f(t)P_\varepsilon(t-0)dt=\lim_{\varepsilon\to 0}u(0,\varepsilon)=f(0).$$

因 $\hat{f}(x)\geqslant 0$, 由 Fatou 引理

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)dt=\int_{\mathbb{R}^n}\lim_{\varepsilon\to 0}\hat{f}(t)e^{-2\pi\varepsilon|t|}dt\leqslant\varliminf_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)e^{-2\pi\varepsilon|t|}dt=f(0).$$

由此, $\hat{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$. □

定理 2.1.14 (L^1 函数 Fourier 变换的唯一性) 如果 $f_1,f_2\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且对 $\forall\, x\in\mathbb{R}^n,\widehat{f_1}(x)=\widehat{f_2}(x)$. 那么 $f_1(x)=f_2(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$.

证明 令 $f=f_1-f_2$. 那么 $\hat{f}(x)=\widehat{f_1}(x)-\widehat{f_2}(x)\equiv 0$. 因此, 由定理 2.1.12

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}dt=0,\qquad \text{a.e.}\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

从而 $f_1(x)=f_2(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$. □

[注 2.1.5] 本节讨论了 L^1 函数 f 的 Fourier 积分 Φ 平均的两个重要的特例, 即 f 的 Fourier 积分的 Abel 平均及 Gauss 平均. Fourier 积分 Φ 平均的另一个重要例子是 Fourier 积分的 Bochner-Riesz 平均. 对 $\alpha>0$, 令

$$\Phi_\alpha(x)=\begin{cases}(1-|x|^2)^\alpha, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{R}$, 那么称

$$B_R^\alpha(f)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}\Phi_\alpha(\frac{t}{R})dt$$

为 f 的 Fourier 积分的 α 阶 Bochner-Riesz 平均. 可以证明, 如 $\alpha>(n-1)/2$ 且 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么当 $R\to\infty$ 时, $B_R^\alpha(f)$ 在 L^1 范数和几乎处处意义下均收敛至 f. 此外, 对 $1<p<\infty$ 也有相同结果. 有关 Bochner-Riesz 平均的深入讨论可见 [9].

§2.2 Fourier 变换的 L^2 理论

§2.2.1 Plancherel 定理

定理 2.2.1 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

证明 对 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 令 $g(x) = \overline{f(-x)}$, 则 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 且 $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$. 另一方面, 如记 $h = f * g$, 则由定理 1.1.2 和定理 2.1.2, $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\hat{h}(x) = \hat{f}(x)\cdot\hat{g}(x) = \hat{f}(x)\cdot\overline{\hat{f}(x)} = |\hat{f}(x)|^2 \geqslant 0. \tag{2.2.1}$$

下说明 h 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续. 事实上, 对 $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ 及 $\delta \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}|h(x+\delta) - h(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x+\delta-t)g(t)dt - \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)g(t)dt\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x+\delta-t) - f(x-t)||g(t)|dt \\ &\leqslant \omega_2(f)(\delta)\cdot\|g\|_2 \to 0 \qquad (\delta \to 0),\end{aligned}$$

这里 $\omega_2(f)(\delta) = \sup\limits_{|u|<\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+u) - f(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ 称为 f 的积分连续模. 由 (2.2.1) 和定理 2.1.12

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(x)dx = h(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(t)g(-t)dt = \int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2.\end{aligned}$$

□

现可以在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中定义 Fourier 变换. 注意到 $L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 取 $\{g_k\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\{g_k\}$ 依 L^2 范数收敛到 g. 由定理 2.2.1,

$$\|\hat{g}_k - \hat{g}_j\|_2 = \|(g_k - g_j)^\wedge\|_2 = \|g_k - g_j\|_2.$$

这样 $\{\hat{g}_k\}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列, 从而 $\{\hat{g}_k\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中存在极限 $\tilde{g}$. 即 $\|\hat{g}_k - \tilde{g}\|_2 \to 0$ $(k \to \infty)$.

现说明对 $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{g}$ 在几乎处处意义下是唯一的. 设存在 $\{g_k\}, \{h_k\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得当 $k \to \infty$ 时, $\|g_k - g\|_2 \to 0$ 且 $\|h_k - g\|_2 \to 0$, 分别记

$\{\hat{g}_k\}$ 和 $\{\hat{h}_k\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的极限为 $\tilde{g}$ 和 $\tilde{h}$, 则

$$\begin{aligned}\|\hat{g}_k - \hat{h}_k\|_2 &= \|(g_k - h_k)\widehat{\ }\|_2 = \|g_k - h_k\|_2 \\ &\leqslant \|g_k - g\|_2 + \|h_k - g\|_2 \to 0 \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

因此

$$\|\tilde{g} - \tilde{h}\|_2 \leqslant \|\tilde{g} - \hat{g_k}\|_2 + \|\tilde{h} - \hat{h}_k\|_2 + \|\hat{g}_k - \hat{h}_k\|_2 \to 0 \quad (k \to \infty).$$

这样, 对 $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 令 $\hat{g}(x) = \tilde{g}(x)$, 由定理 2.2.1 得到

$$\|\hat{g}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\hat{g}_k\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_2 = \|g\|_2. \tag{2.2.2}$$

至此, 我们定义了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中函数的 Fourier 变换. 由前面的讨论可知, $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中函数 f 的 Fourier 变换与基本列的选取无关, 因此对 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 通常如下选取基本列是方便的:

$$f_k(x) \leqslant \begin{cases} f(x), & |x| \leqslant k, \\ 0, & |x| > k, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

定义 2.2.1 设 T 是 Hilbert 空间 X 到自身的有界线性算子. T 称为 X 上的酉算子, 如 T 满足:

(a) $\|Tx\| = \|x\|, \quad \forall\, x \in X$;

(b) $\mathscr{R}(T) = X$,

这里 $\|\cdot\|$ 为 X 中内积所诱导的范数且 $\mathscr{R}(T)$ 记 T 的值域.

定理 2.2.2 (Plancherel 定理) Fourier 变换是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉算子.

证明 为方便, 记 Fourier 变换为 $\mathscr{F}$. (2.2.2) 表明, $\mathscr{F}$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的等距算子. 因此只需验证 $\mathscr{R}(\mathscr{F}) = L^2(\mathbb{R}^n)$. 令 $E = \mathscr{R}(\mathscr{F}) = \{\hat{g} : g \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. 显然 E 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的子空间, 且 E 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的闭子空间. 事实上, $\forall\, \{\hat{f}_k\} \subset E$ 且 $\|\hat{f}_k - g\|_2 \to 0\ (k \to \infty)$. 这里 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 由于

$$\|f_m - f_n\|_2 = \|(f_m - f_n)\widehat{\ }\|_2 = \|\hat{f}_m - \hat{f}_n\|_2 \to 0 \quad (m, n \to \infty),$$

从而 $\{f_k\}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的基本列. 记其 L^2 极限为 f_0. 从而 $\hat{f}_0$ 是 $\{\hat{f}_k\}$ 的 L^2 极限. 这样 $g(x) = \widehat{f}_0(x)$ a.e., 因此 $g \in E$. 如果 E 是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的闭真子空间, 由 Hilbert 空间的正交分解定理, 那么存在 $g \in L^2(\mathbb{R}^n)\backslash E$ 使得 $\|g\|_2 \neq 0$ 且对 $\forall\, \hat{f} \in E$ 有 $\langle \hat{f}, g\rangle = 0$. 由乘法公式 (见下面的推论 2.2.3), 对 $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\bar{g}}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{g(x)}dx = 0.$$

所以

$$\|g\|_2=\|\widehat{g}\|_2=\sup_{\|f\|_2\leqslant 1}\left|\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{g}(x)dx\right|=0.$$

此与 $\|g\|_2\neq 0$ 矛盾. 故 $E=L^2(\mathbb{R}^n)$. □

在定理 2.2.2 的证明中, 我们对 L^2 函数运用了乘法公式, 现给出它的证明.

推论 2.2.3 对任意的 $f,g\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 有

(a) (乘法公式)

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)dx; \tag{2.2.3}$$

(b) (Fourier 变换的 Parseval 等式)

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx. \tag{2.2.4}$$

证明 显然 (2.2.3) 对于 $L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的函数是成立的. 现任取 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 及 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么存在 $\{f_k\}\subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_2=0$. 从而亦有 $\{f_k\}$ 弱收敛于 f. 因为 $\hat{g}\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 故

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_k(x)\hat{g}(x)dx.$$

另一方面, 由 $\lim\limits_{k\to\infty}\|\widehat{f_k}-\hat{f}\|_2=0$ 知, $\{\widehat{f_k}\}$ 亦弱收敛于 $\hat{f}$. 这样由乘法公式 (2.1.4)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f_k(x)\hat{g}(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f_k}(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)dx.$$

结合上式得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)dx.$$

即 (2.2.3) 对于 $g\in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 及 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 成立. 现设 $f,g\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且取 $\{g_k\}\subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k-g\|_2=0$. 运用同样的证明思想,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)dx&=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g_k(x)dx\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}_k(x)dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)dx.\end{aligned}$$

至此证明了乘法公式对于 L^2 函数仍然成立.

而 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换的 Parseval 等式则可运用 Plancherel 定理和下面 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的极化恒等式得到:

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2\right\}. \qquad \square$$

由 Plancherel 定理知, Fourier 变换是 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的酉算子. 因此在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上存在 Fourier 逆变换.

定理 2.2.4 对 $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 令 $\mathscr{F}^{-1}(g)(x) = \mathscr{F}(g)(-x)$. 则 $\mathscr{F}^{-1}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 逆变换.

证明 只需验证对 $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$ 即可. 首先任取 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么对 $\forall\, g \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}), g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathscr{F}(\hat{f})(-x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t)e^{-2\pi i(-x)\cdot t}dt\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\hat{g}(t)}\hat{f}(t)dt \\
&= \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle = \langle f, g\rangle.
\end{aligned}$$

现对 $\forall\, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 取 $\{g_k\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, 使 $\{g_k\}$ 按 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 范数收敛于 g. 因此

$$\langle \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}), g\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle \mathscr{F}^{-1}(\hat{f}), g_k\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle f, g_k\rangle = \langle f, g\rangle. \tag{2.2.5}$$

(2.2.5) 表明对 $\forall\ \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}^{-1}(\hat{f})(x) = f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 由 $L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 的稠密性便知定理的结论成立. $\square$

[注 2.2.1] 定理 2.2.4 的结论等价于: 对 $\forall\, f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}^2 f(x) = f(-x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

推论 2.2.5 (L^2 函数 Fourier 变换的唯一性) 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 如果 $\hat{f}(x) \equiv 0$, 则 $f(x) = 0$ a.e..

定理 2.2.6 如 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么 $\widehat{(f*g)}(x) = \hat{f}(x)\cdot\hat{g}(x)$ a.e..

证明 取 $\{f_k\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)\bigcap L^2(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k - f\|_2 = 0$. 易知在 L^2 的意义下, $\widehat{(f_k*g)}$ 收敛于 $\widehat{(f*g)}$. 另一方面, 由 $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 有 $\widehat{(f_k*g)}(x) = \widehat{f_k}(x)\cdot\hat{g}(x)$

且 $\|\hat{g}\|_\infty \leqslant \|g\|_1$. 因此

$$\|\widehat{f_k}\hat{g} - \widehat{f}\hat{g}\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f_k}(x) - \widehat{f}(x)|^2 |\hat{g}(x)|^2 dx\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \|g\|_1 \|\widehat{f_k} - \hat{f}\|_2 \to 0. \qquad (k \to \infty)$$

故 $(\widehat{f_k * g})(x) = \widehat{f_k}(x) \cdot \hat{g}(x)$ 在 L^2 的意义下收敛于 $\hat{f}(x)\hat{g}(x)$. 由 L^2 极限的唯一性知, $(\widehat{f * g})(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$ a.e.. □

最后我们给出 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 < p < 2)$ 中函数的 Fourier 变换的定义和性质.

记 $(L^1 + L^2)(\mathbb{R}^n) = \{f : f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. 那么对 $\forall\, f \in (L^1 + L^2)(\mathbb{R}^n)$, f 的 Fourier 变换定义为: $\hat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$.

当 $1 < p < 2$ 时, 对 $\forall\, f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 令

$$f_1(x) \leqslant \begin{cases} f(x), & |f(x)| \geqslant 1, \\ 0, & |f(x)| < 1, \end{cases}$$

且 $f_2 = f - f_1$. 则 $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 故 $f \in (L^1 + L^2)(\mathbb{R}^n)$. 这样 $L^p(\mathbb{R}^n) \subset (L^1 + L^2)(\mathbb{R}^n)$. 因此 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < 2)$ 中函数的 Fourier 变换是有意义的.

定理 2.2.7 如 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, 那么对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, $(\widehat{f * g})(x) = \hat{f}(x) \cdot \hat{g}(x)$.

证明 令 $h = f * g$, 那么 $h \in L^p(\mathbb{R}^n)$. 因此 h 的 Fourier 变换是有意义的. 分解 $g = g_1 + g_2$, 其中 $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n), g_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 这样, 对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$

$$\hat{h}(x) = (f * g_1)\widehat{\ }(x) + (f * g_2)\widehat{\ }(x) = \hat{f}(x)\left[\widehat{g_1}(x) + \widehat{g_2}(x)\right] = \hat{f}(x)\hat{g}(x). \qquad \square$$

定理 2.2.8 (Hausdorff-Young 不等式) 设 $1 \leqslant p \leqslant 2$, 那么 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子, 且还有 $\|\mathscr{F} f\|_{p'} \leqslant \|f\|_p$.

证明 由定理 2.1.1 和 Plancheral 定理, $\mathscr{F}$ 分别是 $(1, \infty)$ 型和 (2,2) 型的, 且 $\|\mathscr{F}\|_{(1,\infty)} = \|\mathscr{F}\|_{(2,2)} = 1$. 再应用 Riesz–Thörin 算子内插定理知 Hausdorff-Young 不等式成立. □

[注 2.2.2] 尽管对于 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant 2)$ 中函数 f 已定义了其 Fourier 变换 $\hat{f}$, 但当 $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ 时, 不能写 $\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t) e^{-2\pi i x \cdot t} dt$.

§2.2.2 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中 Fourier 变换的不变子空间

对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|^2 dxdy = \int_0^\infty r \int_0^{2\pi} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 d\theta\, dr < \infty.$$

这样

$$\psi(r) = \int_0^{2\pi} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 d\theta < \infty \quad \text{a.e.} \quad r \in (0,\infty). \tag{2.2.6}$$

由 (2.2.6) 还说明, 对任意的 $r > 0$, $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 作为 θ 的函数在 $[0, 2\pi]$ 上是平方可积的. 现将 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 关于 θ 展开成 Fourier 级数, 那么其 Fourier 系数为 r 的函数, 记为 $\{f_k(r)\}$. 即

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\theta},$$

其中

$$f_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta) e^{-ik\theta} d\theta, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

这样, 对几乎所有的 $r > 0$

$$\int_0^{2\pi} \left| f(r\cos\theta, r\sin\theta) - \sum_{k=-n}^{n} f_k(r) e^{ik\theta} \right|^2 d\theta \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

且由 Parseval 等式,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k(r)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 d\theta, \quad \text{a.e.} \quad r > 0. \tag{2.2.7}$$

由 (2.2.7) 并运用 Lebesgue 单调收敛定理,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty r \sum_{k=-n}^{n} |f_k(r)|^2 dr &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty r \int_0^{2\pi} |f(r\cos\theta, r\sin\theta)|^2 d\theta\, dr \\ &= \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

注意到 $\{e^{ik\theta}\}$ 的两两正交性有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}\left|f(x,y)-\sum_{-n}^{n}f_k(r)e^{ik\theta}\right|^2dxdy\\
=&\int_{\mathbb{R}^2}\left[f(x,y)-\sum_{-n}^{n}f_k(r)e^{ik\theta}\right]\overline{\left[f(x,y)-\sum_{-n}^{n}f_k(r)e^{ik\theta}\right]}dxdy\\
=&\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left[f(r\cos\theta,r\sin\theta)-\sum_{-n}^{n}f_k(r)e^{ik\theta}\right]\\
&\times\overline{\left[f(r\cos\theta,r\sin\theta)-\sum_{-n}^{n}f_k(r)e^{ik\theta}\right]}d\theta\cdot rdr\\
=&\,2\pi\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|^2d\theta-\sum_{-n}^{n}|f_k(r)|^2\right]rdr\\
\longrightarrow&\,0\quad(n\to\infty).
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

对于 $k\in\mathbb{Z}$, 记 $z=re^{i\theta}$ 及

$$
\mathfrak{H}_2^k=\left\{g\in L^2(\mathbb{R}^2):\ g(z)=f(r)e^{ik\theta}\ \text{a.e.},\ f\ \text{可测且满足}\int_0^{\infty}r|f(r)|^2dr<\infty\right\}.
$$

那么有下面的结论:

定理 2.2.9 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 有如下的直和分解:

(a) $L^2(\mathbb{R}^2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\oplus\mathfrak{H}_2^k$;

(b) 每个 $\mathfrak{H}_2^k$ 在 Fourier 变换下不变. 特别地, $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_2^k)=\mathfrak{H}_2^k$.

证明 由 $\{e^{ik\theta}\}$ 的两两正交性立刻得出 $\{\mathfrak{H}_2^k\}$ 是两两正交的.

现说明每个 $\mathfrak{H}_2^k$ 都是闭的. 事实上, 任取点列 $\{g_n\}\subset\mathfrak{H}_2^k$, 并使其在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中收敛到 g_0. 记

$$
L^2(\mathbb{R}_+,rdr)=\left\{f:\int_0^{\infty}|f(r)|^2rdr<\infty\right\},
$$

那么 $L^2(\mathbb{R}_+,rdr)$ 按内积 $\langle f,g\rangle=\int_0^{\infty}f(r)\bar{g}(r)rdr$ 成为 Hilbert 空间. 由 $\mathfrak{H}_2^k$ 的定义, 对每个 n, 不妨记 $g_n(z)=f_n(r)e^{ik\theta}$, 其中 $f_n\in L^2(\mathbb{R}_+,rdr)$. 由于 $\{g_n\}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的 Cauchy 列, 因此 $\{f_n\}$ 亦为 $L^2(\mathbb{R}_+,rdr)$ 中的 Cauchy 列. 事实上, 对任意的 m,n

$$
\begin{aligned}
\|g_m-g_n\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2&=\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}|f_m(r)e^{ik\theta}-f_n(r)e^{ik\theta}|^2d\theta rdr\\
&=2\pi\int_0^{\infty}|f_m(r)-f_n(r)|^2rdr\\
&=2\pi\|f_m-f_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+,rdr)}^2.
\end{aligned}
$$

由 $L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$ 的完备性知，存在 $f_0 \in L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$ 使得 $\{f_n\}$ 依 $L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$ 范数收敛到 f_0. 故 $\{g_n\}$ 依 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 范数收敛到 $f_0(r)e^{ik\theta}$. 从而 $\mathfrak{H}_2^k$ 为闭子空间. 最后由 (2.2.9) 知, $\{\mathfrak{H}_2^k\}_{-\infty}^{\infty}$ 张成的线性子空间的闭包包含了 $L^2(\mathbb{R}^2)$. 这样证明了结论 (a).

现给出 (b) 的证明. 首先说明 $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_2^k) \subset \mathfrak{H}_2^k$. 设 $g \in \mathfrak{H}_2^k \cap L^1(\mathbb{R}^2)$, 那么存在 $f(r) \in L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$ 使得 $g(z) = f(r)e^{ik\theta}$ a.e. $z \in \mathbb{R}^2$. 任取 $\phi \in (0, 2\pi)$, 令 $h(z) = g(e^{i\phi}z)$. 那么

$$h(z) = g(e^{i\phi}z) = f(r)e^{ik(\phi+\theta)} = e^{ik\phi}g(z) \quad \text{a.e.} \quad z \in \mathbb{R}^2. \tag{2.2.10}$$

注意到 Fourier 变换与旋转的可交换性, 由 (2.2.10)

$$\hat{g}(e^{i\phi}\xi) = \hat{h}(\xi) = (\widehat{e^{ik\phi}g})(\xi) = e^{ik\phi}\hat{g}(\xi), \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^2 \text{ 及 } \phi \in [0, 2\pi]. \tag{2.2.11}$$

在 (2.2.11) 中取 $\xi = r$ 得

$$\hat{g}(re^{i\phi}) = \hat{g}(r)e^{ik\phi}, \quad \forall\, \phi \in [0, 2\pi]. \tag{2.2.12}$$

下面验证 $\hat{g}(r) \in L^2(\mathbb{R}_+, rdr)$. 注意到 $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 应用 (2.2.11) 和 (2.2.12) 有

$$\begin{aligned}
\infty > \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}^2} |e^{-ik\phi}\hat{g}(e^{i\phi}\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_0^\infty r \int_0^{2\pi} |\hat{g}(re^{i(\phi+\theta)})|^2 d\theta dr \\
&= 2\pi \int_0^\infty r|\hat{g}(r)|^2 dr.
\end{aligned}$$

这样 $\hat{g} \in \mathfrak{H}_2^k$. 由于 $\mathfrak{H}_2^k \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ 在 $\mathfrak{H}_2^k$ 中稠密, 因此对任意的 $g \in \mathfrak{H}_2^k$, 存在 $g_n \in \mathfrak{H}_2^k \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ 使得 $\{g_n\}$ 依 L^2 范数收敛到 g. 自然地, $\{\hat{g}_n\}$ 按 L^2 范数收敛至 $\hat{g}$. 因为 $\{\hat{g}_n\} \subset \mathfrak{H}_2^k$ 且 $\mathfrak{H}_2^k$ 闭, 故 $\hat{g} \in \mathfrak{H}_2^k$. 从而 $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_2^k) \subset \mathfrak{H}_2^k$.

最后说明 $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_2^k) = \mathfrak{H}_2^k$. 对任意的 $g \in \mathfrak{H}_2^k$, 则 $\mathscr{F}g \in \mathfrak{H}_2^k$. 另一方面, 由 Plancherel 定理, 存在 $h \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 使 $h(z) = (\mathscr{F}^{-1}g)(z)$. 而 $(\mathscr{F}^{-1}g)(z) = (\mathscr{F}g)(-z) \in \mathfrak{H}_2^k$. 故 $h \in \mathfrak{H}_2^k$ 且 $g = \hat{h}$. □

下面的定理具体回答了 Fourier 变换是如何作用于 $\mathfrak{H}_2^k$ 的. 为此我们先给出 Bessel 函数的定义. 函数 $e^{it\sin\theta}$ 的 Fourier 系数 $J_k(t)$ 称为 Bessel 函数. 即：

$$J_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it\sin\theta} e^{-ik\theta} d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

不难验证，Bessel 函数满足如下基本性质：

$$J_k(t) = (-1)^k J_{-k}(t), \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{2.2.13}$$

定理 2.2.10 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ 且 $f(z) = f_0(r)e^{ik\theta}$, $z = re^{i\theta}$. 那么 $\hat{f}(w) = F_0(R)e^{ik\phi}$, 其中 $w = Re^{i\phi}$,

$$F_0(R) = 2\pi i^k \int_0^\infty f_0(r) J_{-k}(2\pi Rr) r dr = 2\pi(-i)^k \int_0^\infty f_0(r) J_k(2\pi Rr) r dr.$$

证明 由定理 2.2.9 知, $\hat{f} \in \mathfrak{H}_2^k$. 如记 $w = Re^{i\phi}$, 那么 $\hat{f}(w) = F_0(R)e^{ik\phi}$. 为计算 $F_0(R)$, 不妨假设 $f \in \mathfrak{H}_2^k \cap L^1(\mathbb{R}^2)$. 令 $w = Re^{i0} = R(1,0)$, 则 $w \cdot z = Rr(1,0) \cdot (\cos\theta, \sin\theta) = Rr\cos\theta$. 这样

$$\begin{aligned} F_0(R) = \hat{f}(Re^{i0}) &= \int_0^\infty f_0(r) \int_0^{2\pi} e^{-2\pi i Rr\cos\theta} e^{ik\theta} d\theta \, r dr \\ &= (-i)^k 2\pi \int_0^\infty f_0(r) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2\pi i Rr \sin\theta} e^{-ik\theta} d\theta \right\} r dr \\ &= 2\pi(-i)^k \int_0^\infty f_0(r) J_k(2\pi Rr) r dr. \end{aligned}$$

由 (2.2.13) 式, 即可得 $F_0(R)$ 的另一表达式. 由于 $\mathfrak{H}_2^k \cap L^1(\mathbb{R}^2)$ 在 $\mathfrak{H}_2^k$ 中稠密, 通过标准的的方法即知定理的结论对任意的 $f \in \mathfrak{H}_2^k$ 成立. □

§2.3 Poisson-Stieltjies 积分和 Fourier-Stieltjies 变换

记 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上有限复值 Borel 测度的全体. 对 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, $\|\mu\|_{\mathscr{M}} = \int_{\mathbb{R}^n} |d\mu(x)|$ 称为 μ 全变差范数, 那么 $\mathscr{M}$ 在此范数下成为 Banach 空间. 由 Riesz 表示定理，在同构的意义下，$\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 是 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间 (见 [42])：

$$\langle f, \mu \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{d\mu(x)}, \qquad f \in C_0(\mathbb{R}^n), \ \mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n). \tag{2.3.1}$$

定义 2.3.1 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 且 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 则 f 与 μ 的卷积定义为

$$(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t) d\mu(t), \quad \text{a.e.} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

例 2.3.1 设 $a \in \mathbb{R}^n$, 如下定义在 a 点的 Dirac 测度 δ_a:

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1, & \text{如 } a \in E, \\ 0, & \text{如 } a \notin E. \end{cases}$$

当 $a = 0$ 时, 简记为 δ. 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 那么 f 与 Dirac 测度 δ_a 的卷积为

$$(f * \delta_a)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-t)d\delta_a(t) = f(x-a), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.2}$$

特别地, $(f * \delta)(x) = f(x)$.

应用 Fubini 定理可得下面关于测度与 L^p 函数的卷积的结论.

定理 2.3.1 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 且 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 那么 $f * \mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\|f * \mu\|_p \leqslant \|f\|_p \|\mu\|_{\mathscr{M}}.$$

定义 2.3.2 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 那么测度 μ 的 Poisson-Stieltjies 积分定义为:

$$u(x,\varepsilon) = (P_\varepsilon * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_\varepsilon(x-t)d\mu(t), \qquad \varepsilon > 0,$$

其中 $P_\varepsilon(x)$ 为 Poisson 核.

下面给出 μ 的 Poisson-Stieltjies 积分的几个性质.

定理 2.3.2 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 那么

(a) 对任意的 $\varepsilon > 0$, $\|P_\varepsilon * \mu\|_1 \leqslant \|\mu\|_{\mathscr{M}}$;

(b) 当 $\varepsilon \to 0$ 时, μ 的 Poisson-Stieltjies 积分 $u(x,\varepsilon)$ 弱 * 收敛于 μ.

证明 结论 (a) 是命题 1.3.3 和定理 2.3.1 的直接结果. 而结论 (b) 则可由 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n) = (C_0(\mathbb{R}^n))^*$ 及推论 1.3.5(b) 得到. □

[注 2.3.1] 类似地, 可定义测度的 Gauss-Stieltjies 积分, 并可得相同结果.

现给出测度的 Fourier-Stieltjies 变换的定义.

定义 2.3.3 对 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, μ 的 Fourier-Stieltjies 变换定义为:

$$\hat{\mu}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot t} d\mu(t), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

例 2.3.2 Dirac 测度 δ_a 的 Fourier-Stieltjies 变换为:

$$\hat{\delta}_a(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot t} d\delta_a(t) = e^{-2\pi i x\cdot a}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3.3}$$

特别地, $\hat{\delta} \equiv 1$.

关于测度的 Fourier-Stieltjies 变换有下面的基本性质, 其证明是简单的.

定理 2.3.3 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 则 μ 的 Fourier-Stieltjies 变换 $\hat{\mu}$ 满足:

(a) $\|\hat{\mu}\|_\infty \leqslant \|\mu\|_{\mathscr{M}}$;

(b) $\hat{\mu}(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致连续.

[注 2.3.2] Riemann-Lebesgue 引理 (定理 2.1.1(c)) 对 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中测度不再成立. 例 2.3.2 即可说明这一事实.

定理 2.3.4 设 $\mu, \nu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 且 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant 2)$.

(a) ($\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中的乘法公式) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(x) d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\nu}(x) d\mu(x)$;

(b) (测度卷积的 Fourier 变换) $\widehat{(f * \mu)}(x) = \hat{f}(x)\hat{\mu}(x)$;

(c) (Fourier-Stieltjies 变换的 Parseval 等式) 如 $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 f 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续, 那么

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{\mu}(-\xi) d\xi, \tag{2.3.4}$$

及

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\hat{\mu}(\xi) d\xi. \tag{2.3.5}$$

证明 仅证 (2.3.4) 式. 由 [注 2.1.3]

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\xi, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi} d\mu(x) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\hat{\mu}(-\xi) d\xi.$$

□

推论 2.3.5 $\mathbb{R}^n$ 上连续函数 φ 是 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中测度 μ 的 Fourier-Stieltjies 变换的充分必要条件是存在常数 $C > 0$ 使得对每个 $f \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\hat{f}$ 具有紧支集, 有

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(-\xi) d\xi \right| \leqslant C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|. \tag{2.3.6}$$

证明 如 $\varphi = \hat{\mu}$, 那么由 (2.3.4)

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi \right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| \|\mu\|_{\mathscr{M}}.$$

反之，记

$$K = \{f : f \in C_0(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n) \text{且 } \hat{f} \text{ 具有紧支集}\},$$

那么 K 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 如 (2.3.6) 成立，则映射 $\ell : f \to \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)\varphi(-\xi)d\xi$ 是定义在 K 上的有界线性泛函. 这样 ℓ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上有唯一的有界延拓. 由 Riesz 表示定理，存在 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 使得对 $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\ell(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x)$ 且 $\|\mu\|_{\mathscr{M}} \leqslant \|\ell\|$. 再次应用 (2.3.4) 知，

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)[\hat{\mu}(-\xi) - \varphi(-\xi)]d\xi = 0, \quad \forall f \in K.$$

因此 $\varphi = \hat{\mu}$. □

与 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 函数一样，可以定义测度的 Fourier-Stieltjies 积分，并在弱 * 收敛的意义下，可以讨论测度的 Fourier-Stieltjies 积分的反演问题. 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 那么 μ 的 Fourier-Stieltjies 积分定义为:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(x)e^{2\pi i x\cdot t}dx.$$

而 μ 的 Fourier-Stieltjies 积分的 Abel 平均定义为:

$$A_\varepsilon(\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(x)e^{2\pi i x\cdot t}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx, \qquad \varepsilon > 0.$$

定理 2.3.6 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 那么当 $\varepsilon \to 0$ 时, $A_\varepsilon(\mu)$ 弱 * 收敛于 μ.

证明 由定理 2.3.2 (b)，只需说明对 $\forall\varepsilon > 0$,

$$A_\varepsilon(\mu)(t) = u(t,\varepsilon) = (P_\varepsilon * \mu)(t). \tag{2.3.7}$$

记 $d\nu(x) = e^{2\pi i x\cdot t}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx$. 那么由定理 2.3.4 (a)

$$A_\varepsilon(\mu)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(x)d\nu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\nu}(y)d\mu(y).$$

由定义 2.3.3,

$$\begin{aligned}
\hat{\nu}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y}e^{2\pi i x\cdot t}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(y-t)\cdot t}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx \\
&= P_\varepsilon(y-t).
\end{aligned}$$

由此知 (2.3.7) 成立. □

推论 2.3.7 (测度 Fourier-Stieltjies 变换的唯一性) 设 $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2$. 则 $\mu_1 = \mu_2$.

证明 令 $\mu = \mu_1 - \mu_2$. 由 $\hat{\mu} \equiv 0$ 得 $A_\varepsilon(\mu) \equiv 0$. 再应用 (2.3.7) 即可. □

[注 2.3.3] 类似地可定义测度的 Fourier-Stieltjies 积分的 Gauss 平均，并运用测度的 Gauss-Stieltjies 积分的结论得到相关结果.

§2.4 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换的进一步讨论 *

§2.4.1 Heisenberg 不等式

Heisenberg 测不准原理的物理背景是揭示微观粒子的位置和动量的测不准关系，它是量子力学中的基本结果之一. 测不准原理在数学上表达为下面 Heisenberg 不等式.

定理 2.4.1 (Heisenberg 不等式) 设 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 那么对任意的 $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x - x_0|^2 |f(x)|^2 dx\right) \geqslant \frac{n^2}{16\pi^2}\|f\|_2^4. \tag{2.4.1}$$

(2.4.1) 中等号成立当且仅当 $f(x) = ce^{2\pi i x\cdot\xi_0}e^{-\alpha|x-x_0|^2/2}$, 其中 $\alpha > 0$ 且 $c \in \mathbb{C}$.

证明 先给出以下记号: 对 $\mathbf{g} = (g_1, \cdots, g_n)$, $g_j \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 记

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right), \qquad \nabla\cdot\mathbf{g} = \frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n};$$

及

$$x\cdot\mathbf{g} = x_1 g_1 + x_2 g_2 + \cdots + x_n g_n, \quad x\circ f = (x_1 f, x_2 f, \cdots, x_n f).$$

先设 $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $x_0 = \xi_0 = 0$, 那么

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(x\circ f) - x\cdot\nabla f &= \nabla\cdot(x_1 f, x_2 f, \cdots, x_n f)\\ &\quad - \left(x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\\ &= nf.\end{aligned}$$

由上式并运用分部积分即可得:

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}[\nabla\cdot(x\circ f)-x\cdot\nabla f]\bar{f}\,dx\\ &= -\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}[(x\circ f)\cdot\nabla\bar{f}+\nabla f\cdot(x\circ\bar{f})]\,dx.\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}\|f\|_2^2 &= -\frac{2}{n}Re\Big(\int_{\mathbb{R}^n}(x\circ f)\cdot\nabla\bar{f}\,dx\Big)\\ &\leqslant \frac{2}{n}\Big|\int_{\mathbb{R}^n}(x\circ f)\cdot\nabla f\,dx\Big| &(*)\\ &\leqslant \frac{2}{n}\|\nabla f\|_2\cdot\|x\circ f\|_2 &(**)\\ &= \frac{2}{n}\|\widehat{\nabla f}\|_2\cdot\|x\circ f\|_2\\ &= \frac{4\pi}{n}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|f(x)|^2\,dx\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

现设 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 如 $\|\xi\hat{f}\|_2$ 或 $\|xf\|_2$ 为 ∞, 则结论自然成立. 故不妨设二者均有限. 因此只须说明, 对于满足 $xf(x),\xi\hat{f}(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 函数 f, 存在 $\{f_k\}\subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使在 L^2 意义下, 当 $k\to\infty$ 时

$$f_k\to f,\quad xf_k\to xf(x),\quad \xi\hat{f}_k(\xi)\to\xi\hat{f}(\xi)$$

均成立. 而应用 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性 (推论 3.1.4) 易证上述事实.

注意到 (2.4.1) 成为等式当且仅当不等式 $(*)$ 和 $(**)$ 均成为等式. 而 $(**)$ 成为等式等价于存在 $\lambda\in\mathbb{C}$, 使对任意 $x\in\mathbb{R}^n$, $\nabla f=\lambda x\circ f$. 而 $(*)$ 式成为等式等价于 $\lambda\in\mathbb{R}$ 且 $\lambda<0$. 因此 (2.4.1) 中等式成立当且仅当

$$\nabla f=-\alpha x\circ f(x)\qquad(\alpha=-\lambda>0,\quad\forall\,x\in\mathbb{R}^n).$$

由此即知 $f(x)=ce^{-\alpha|x|^2/2}$.

最后, 对任意的 $x_0,\xi_0\in\mathbb{R}^n$, 及 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 令 $g(x)=e^{-2\pi ix\cdot\xi_0}f(x+x_0)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2|g(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}|x-x_0|^2|f(x)|^2\,dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\xi|^2|\hat{g}(\xi)|^2\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}|\xi-\xi_0|^2|\hat{f}(\xi)|^2\,d\xi,$$

且 $\|g\|_2=\|f\|_2$. 这样完成了定理 2.4.1 的证明. □

§2.4.2 Hermite 算子和 Fourier 变换

由 [注 2.2.1]知道，对 $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)\cap C(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{F}^2 f(x)=f(-x)$, 进而 $\mathscr{F}^4 f(x)=f(x)$. 如果记 λ 为 $\mathscr{F}$ 的特征值，那么 λ 满足 $\lambda^4=1$. 从而 $1,-1,i,-i$ 为 Fourier 变换的特征值. 可以证明，$\sigma(\mathscr{F})=\{1,-1,i,-i\}$. 因此如能选择由 $\mathscr{F}$ 的特征函数所组成的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的完全正交系，那么 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 对应这个基的无穷阶矩阵将为对角矩阵. 下面将说明，Hermite 函数系正是我们所需要的完全正交系.

定义在 Schwartz 函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$（其定义见 §3.1）上的线性算子 $\mathcal{H}=-\Delta+|x|^2$ 称为 Hermite 算子, 其中 $\Delta=\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ 为 n 维的 Laplace 算子. 为叙述方便，下面仅考虑 $n=1$ 的情形，即 $\mathcal{H}=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2$. (此时也称 $\mathcal{H}$ 为调和振子 (harmonic oscillator)). 先引进 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 上另两个算子：

$$A=\frac{d}{dx}+x \qquad \text{及} \qquad A^*=-\frac{d}{dx}+x,$$

这里 A 称为零化算子 (annihilation operator), A^* 称为生成算子 (creation operator). 我们定义 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 中的内积为

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx, \qquad \forall\, f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

一个明显的事实是，A^* 是 A 的共轭算子.

引理 2.4.2 (生成算子及零化算子与 Hermite 算子的关系)

(a) $A^*A=\mathcal{H}-I$, I 记恒等算子；

(b) $AA^*=\mathcal{H}+I$;

(c) $[A,\mathcal{H}]=2A$;

(d) $[A^*,\mathcal{H}]=-2A^*$.

其中 $[A,\mathcal{H}]=A\mathcal{H}-\mathcal{H}A$ 为算子 A 与算子 $\mathcal{H}$ 的交换子.

证明 注意到一维的 Hermite 算子 $\mathcal{H}=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2$, 因此 (a)(b) 直接验证即可. 又由 (a)

$$A\mathcal{H}=AA^*A+A,$$

且由 (b)

$$\mathcal{H}A=AA^*A-A.$$

因此 (c) 成立. 同样可知 (d) 成立. □

由引理 2.4.2 立刻可以看出，Hermite 算子 $\mathcal{H}$ 是自共轭的，因此其特征值为实数. 进一步，有下面的结论：

定理 2.4.3 (Hermite 算子的特征值和特征函数) 设 λ 为 $\mathcal{H}$ 的特征值,

(a) $\lambda \geqslant 1$;

(b) $\mathcal{H}e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}$;

(c) 如果 φ 是 $\mathcal{H}$ 的相应于 λ 的特征函数, 则 $A^*\varphi$ 是 $\mathcal{H}$ 的相应于 $\lambda+2$ 的特征函数;

(d) 如果 φ 是 $\mathcal{H}$ 的相应于 $\lambda\,(\lambda \neq 1)$ 的特征函数, 则 $A\varphi$ 是 $\mathcal{H}$ 的相应于 $\lambda-2$ 的特征函数.

证明 首先, 设 φ 是 $\mathcal{H}$ 的相应于 λ 的特征函数, 由引理 2.4.2(a),

$$\begin{aligned}\lambda\langle\varphi,\varphi\rangle &= \langle\mathcal{H}\varphi,\varphi\rangle = \langle A^*A\varphi,\varphi\rangle + \langle\varphi,\varphi\rangle \\ &= \langle A\varphi, A\varphi\rangle + \langle\varphi,\varphi\rangle \\ &\geqslant \langle\varphi,\varphi\rangle.\end{aligned} \tag{2.4.2}$$

这样 (a) 成立. 下面我们说明 λ 的最小值为 1. 由 (2.4.2) 知, $\lambda = 1$ 当且仅当 $A\varphi = 0$. 而这是一阶的常微分方程, 如不计常数因子, $\varphi = e^{-x^2/2}$ 是其唯一解. 这样

$$\mathcal{H}e^{-x^2/2} = A^*Ae^{-x^2/2} + e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}.$$

注意到结论 (c) 和 (d) 成立的前提是, 对于 $\mathcal{H}$ 任一特征函数 φ, $A\varphi$ 和 $A^*\varphi$ 均不为零. 事实上, 上面已看到只要 $\lambda \neq 1$, 则必定 $A\varphi \neq 0$. 另一方面, $e^{x^2/2}$ 是 $A^*\varphi = 0$ 的唯一解 (不计常数因子), 然而 $e^{x^2/2} \notin \mathscr{S}(\mathbb{R})$. 现设 φ 是 $\mathcal{H}$ 的相应于 λ 的特征函数, 由引理 2.4.2(d),

$$A^*\mathcal{H}\varphi - \mathcal{H}A^*\varphi = -2A^*\varphi.$$

因此

$$\mathcal{H}(A^*\varphi) = A^*\mathcal{H}\varphi + 2A^*\varphi = (\lambda+2)A^*\varphi.$$

同理可知结论 (d) 成立. □

推论 2.4.4 (Hermite 算子特征值) Hermite 算子 $\mathcal{H}$ 的特征值为全体正奇数.

证明 一方面由定理 2.4.3(b) 和 (c) 可知, $\{2m+1 : m \in \mathbb{Z}_+\}$ 是 Hermite 算子的特征值. 另一方面, 对任意的 $\lambda > 1$, 且 $\lambda \notin \{2m+1 : m \in \mathbb{Z}_+\}$, 可取 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $\lambda - 2k < 1$. 如果 λ 是算子 $\mathcal{H}$ 的特征值, 那么由定理 2.4.3(d), $\lambda - 2k$ 也是 $\mathcal{H}$ 的特征值, 但此与定理 2.4.3(a) 矛盾. 因此 λ 必不是 $\mathcal{H}$ 的特征值. □

现给出 Hermite 函数系的定义如下:

$$h_k(x) = (A^*)^k e^{-x^2/2}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+. \tag{2.4.3}$$

由 Hermite 函数系的定义可以看出 $h_k(x) = P_k(x)e^{-x^2/2}$, 其中 P_k 为 k 阶多项式. 从而 Hermite 函数系 $\{h_k\} \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ (见 [注 3.1.1]).

引理 2.4.5 (Hermite 函数系的等价定义) Hermite 函数系有如下等价定义:

(a) $h_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+$;

(b) $\{h_k\}$ 满足等式: $\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) \frac{t^k}{k!} = e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}$.

证明 运用归纳法直接验证即可知 (a) 成立. 写 $e^{-(x^2/2-2tx+t^2)} = e^{x^2/2}e^{-(x-t)^2}$, 并注意到等式

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{-(x-t)^2} = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}e^{-(x-t)^2}.$$

对 $e^{-(x-t)^2}$ 在 $t=0$ 处运用 Taylor 展开公式即可. □

定理 2.4.6 (Hermite 函数系的性质)

(a) $\mathcal{H}h_k = (2k+1)h_k, \quad k \in \mathbb{Z}_+$;

(b) $\{h_k\}$ 是正交系;

(c) $\|h_k\|_2 = \pi^{1/4}\sqrt{2^k k!}, \quad k \in \mathbb{Z}_+$;

(d) $\{h_k\}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是完全的.

证明 由定理 2.4.3 的 (b) 和 (c), 并运用归纳法即可知 (a) 成立. 因 $\mathcal{H}$ 为自伴算子, 由结论 (a) 知当 $k \neq j$ 时

$$(2k+1)\langle h_k, h_j\rangle = \langle \mathcal{H}h_k, h_j\rangle = \langle h_k, \mathcal{H}h_j\rangle = (2j+1)\langle h_k, h_j\rangle.$$

故 $\langle h_k, h_j\rangle = 0$. 由引理 2.4.5(b) 及 $\{h_k\}$ 的正交性知

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} h_k(x)^2 dx \frac{t^{2k}}{(k!)^2} = \int_{\mathbb{R}} e^{x^2-2(x-t)^2} dx = e^{2t^2}\pi^{1/2}.$$

注意到 $e^{2t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{t^{2k}}{k!}$, 因此得到 (c). 最后, 如 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, 且

$$\langle f, h_k\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)h_k(x)dx = 0 \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

则由引理 2.4.5(b) 知

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}dx = 0.$$

即有

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-x^2/2}e^{2tx}dx = 0.$$

应用习题二 (5) 知 $f = 0$. 由于 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密 (见推论 3.1.5), 从而 (d) 成立. □

[注 2.4.1] 定理 2.4.6 (a) 说明 Hermite 函数系 $\{h_k\}$ 是 Hermite 算子 $\mathcal{H}$ 的特征函数.

定理 2.4.7 (Fourier 变换的特征函数) 记

$$h_k^*(x) = h_k(\sqrt{2\pi}x), \qquad k \in \mathbb{Z}_+,$$

那么 $\{h_k^*\}$ 是 Fourier 变换的特征函数. 特别地,

$$\mathscr{F}h_k^*(\xi) = (-i)^k h_k^*(\xi), \qquad k \in \mathbb{Z}_+.$$

证明 由引理 2.4.5(a) 直接计算便可. □

[注 2.4.2] 高维 Hermite 函数系在 Heisenberg 群上的 Fourier 分析中具有重要作用. 见 E. M. Stein 的专著 [46].

习 题 二

1. 设 $\{f_j\}$ 是 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列. 证明：存在 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使得当 $j \to \infty$ 时, $\{\hat{f}_j\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 一致收敛于 $\hat{f}$.

2. 证明：对任意的 $f \in L^1(\mathbb{R})$, 集合 $N(f) = \{\xi \in \mathbb{R} : \hat{f}(\xi) = 0\}$ 为 $\mathbb{R}$ 中的闭集.

3. 证明：在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中，关于卷积运算不存在单位元，即：不存在 $e \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 有 $e * f = f$.

4. 设 ρ 为 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 的连续可逆线性变换. 对 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f, 定义算子 $R_\rho : (R_\rho f)(x) = f(\rho x)$. 证明：如果在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换与 R_ρ 可交换, 那么 ρ 是正交变换. (定理 2.1.3 结论 (c) 的逆.)

5. 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$. 证明：如存在 $a > 0$ 使得

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-|y|^2} e^{ax \cdot y} dy = 0, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

那么 $f = 0$.

6. 证明：Gauss-Weierstrass 核 $W(x,a)$ 和 Poisson 核 $P_a(x)$ 满足如下性质：对 $a, b > 0$,

(i) $\big(W(\cdot,a) * W(\cdot,b)\big)(x) = W(x, a+b)$;

(ii) $\big(P_a(\cdot) * P_b(\cdot)\big)(x) = P_{a+b}(x)$.

7. 证明：$L^1(\mathbb{R})$ 中奇（偶）函数的 Fourier 变换仍为奇（偶）函数.（说明该结论对 $L^2(\mathbb{R})$ 亦成立.）

8. 证明：集合 $\{f \in L^1(\mathbb{R}^n) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)\}$ 在 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 中稠密.

9. 证明：对任意的 $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 成立着 Plancherel 公式: $\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$.

10. 设 $\{\mu_k\} \subset \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|\mu_k\|_{\mathscr{M}} \leqslant 1$. 证明：如果 $\{\hat{\mu}_k\}$ 点态收敛于连续函数 φ, 则存在 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|\mu\|_{\mathscr{M}} \leqslant 1$, 使得 $\varphi = \hat{\mu}$. 此外 $\{\mu_k\}$ 弱 * 收敛于 μ.

11. 设 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 那么测度 μ 的 Hardy-Littlewood 极大函数 $M(\mu)$ 定义为：

$$M(\mu)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |d\mu(y)|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

证明：对 $x \in \mathbb{R}^n$, $M(\delta_a)(x) = (v_n |x-a|^n)^{-1}$, 这里 δ_a 为 Dirac 测度并且 v_n记 $\mathbb{R}^n$ 中单位球的体积.

第三章　SCHWARTZ 函数和缓增广义函数

按经典 Fourier 变换的定义方式, 对 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(p>2)$ 中函数不能定义 Fourier 变换. 由于 Fourier 变换在分析中的重要性，因此有必要拓广 Fourier 变换的定义范围. 上世纪五十年代发展起来的广义函数论十分有效地拓广了 Fourier 变换的定义范围, 为现代分析研究提供了强有力的工具. 本章将证明 Fourier 变换是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的同胚. 进一步，将研究 Fourier 变换在其对偶空间 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$（缓增广义函数类）上的性质. 最后我们将给出平移可交换算子的特征.

§3.1　Schwartz 函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

§3.1.1　$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质

定义 3.1.1　Schwartz 函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 定义为

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n):\ \text{对}\ \forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n,\ \ \rho_{\alpha,\beta}(\varphi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|<\infty\right\}.$$

我们看到, 对 $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$, $\rho_{\alpha,\beta}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个半范. 它是一个可列的半范族, 由此诱导了 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Hausdorff 局部凸拓扑. 通常称 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 为 Schwartz 速降函数空间.

[注 3.1.1]　容易看出 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个线性空间, 并且 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 是一个交换代数. 此外, 如果 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $P(x)$ 为任意多项式, 那么 $P(x)\varphi(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 且 $P(D)\varphi(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

例 3.1.1　对 $\varepsilon>0$, Gauss 求和因子 $e^{-\varepsilon|x|^2}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 但 Able 求和因子 $e^{-\varepsilon|x|}\notin\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

在 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 上赋予下面的半范后所诱导的 Hausdorff 局部凸拓扑空间记为 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 即

$$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)=\left\{\varphi:\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)\ \text{且对}\ \forall\,\alpha\in\mathbb{Z}_+^n,\ \ \rho_\alpha(\varphi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|D^\alpha\varphi(x)|<\infty\right\}.$$

[注 3.1.2] 由于 $e^{-|x|^2}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 但 $e^{-|x|^2}\notin\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 因此 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)\subsetneq\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

例 3.1.2 令

$$\varphi(t)=\begin{cases} e^{-2/(1-t^2)}, & |t|<1,\\ 0, & |t|\geqslant 1,\end{cases}$$

那么 $\varphi(t)\in C_c^\infty(\mathbb{R})$. 现记

$$\psi(x)=\begin{cases} e^{-2/(1-|x|^2)}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$$

那么 $\psi(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 特别地, 令 $\varphi(x)=\psi(x)/\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)dx$, 则仍有 $\varphi(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$.

定理 3.1.1 对于 $1\leqslant p<\infty$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^p(\mathbb{R}^n)$, 且当 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\|\varphi\|_p\leqslant C_{n,p}\sum_\alpha\rho_{\alpha,0}(\varphi)$, 这里 $\sum_\alpha$ 为有限和. 此外, 当 $p=\infty$ 时, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset C_0(\mathbb{R}^n)\subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

证明 仅考虑 $1\leqslant p<\infty$ 的情形. 设 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p &\leqslant\left(\int_{|x|\leqslant 1}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}+\left(\int_{|x|>1}|\varphi(x)|^p dx\right)^{1/p}\\ &\leqslant A\left(\int_{|x|\leqslant 1}dx\right)^{1/p}+B\left(\int_{|x|>1}|x|^{-2np}dx\right)^{1/p}\\ &\leqslant\|\varphi\|_\infty v_n^{1/p}+\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left||x|^{2n}\varphi(x)\right|[v_n/(2p-1)]^{1/p}\\ &\leqslant C_{n,p}\sum_\alpha\rho_{\alpha,0}(\varphi).\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

□

现可以定义 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的距离. 对 $\forall\,\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ 及 $\forall\,\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 令半范 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi-\psi)=d_{\alpha,\beta}(\varphi,\psi)$. 将 $\{d_{\alpha,\beta}(\varphi,\psi):\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n\}$ 排成一列, 并记为 $\{d_n\}_{n=1}^\infty$. 对 $\forall\,\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$d(\varphi,\psi)=\sum_{n=1}^\infty 2^{-n}\frac{d_n(\varphi,\psi)}{1+d_n(\varphi,\psi)}.\tag{3.1.2}$$

可以验证, 由 (3.1.2) 所定义的 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的二元函数是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的距离.

定理 3.1.2 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 关于距离 d 是一个完备的距离空间. (即: $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 关于距离 d 是 Frechet 空间.)

证明 先证明当 $k \to \infty$ 时：$d(\varphi_k, \psi) \to 0 \Longleftrightarrow$ [1]$\forall\, n, d_n(\varphi_k, \psi) \to 0$. 事实上,

$$d(\varphi_k, \psi) \to 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(\varphi_k, \psi)}{1 + d_n(\varphi_k, \psi)} \to 0.$$

如果 $d(\varphi_k, \psi) \to 0$, 但存在 n_0, 使得 $d_{n_0}(\varphi_k, \psi)$ 不收敛于 0, 那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(\varphi_k, \psi)}{1 + d_n(\varphi_k, \psi)}$$

必不收敛于 0.

反之, 由 d 的定义 (3.1.2) 可知, $\forall\, \varepsilon > 0$, 存在充分大的 N, 使

$$\sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(\varphi_k, \psi)}{1 + d_n(\varphi_k, \psi)} \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon/2.$$

因对于 $\forall\, n$, 当 $k \to \infty$ 时 $d_n(\varphi_k, \psi) \to 0$, 所以存在 $K_0 > 0$, 使得对 $1 \leqslant n \leqslant N-1$, 当 $k > K_0$ 时,

$$d_n(\varphi_k, \psi) < \varepsilon/2N, \quad n = 1, 2, \cdots, N-1.$$

这样当 $k > K_0$ 时,

$$d(\varphi_k, \psi) \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} 2^{-n} d_n(\varphi_k, \psi) + \sum_{n=N}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon.$$

由此进一步可知, $d(\varphi_k, \psi) \to 0 \Longleftrightarrow \rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k - \psi) \to 0$ 对 $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$. 这个事实说明, 由距离 d 和半范族 $\{\rho_{\alpha,\beta}\}$ 诱导了 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上同一拓扑.

下面证明 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 关于距离 d 是完备的. 设 $\{\varphi_k\}$ 关于 d 是 Cauchy 列. 则对 $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{\varphi_k\}$ 关于 $\rho_{\alpha,\beta}$ 也是 Cauchy 列. 特别地, 由 $\{\varphi_k\}$ 的任意阶导数组成的序列 $\{D^\beta \varphi_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上一致收敛. 事实上, 对 $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, 因为 $\{\varphi_k\}$ 关于 $\rho_{\alpha,\beta}$ 是 Cauchy 列, 因此当 $k, j \to \infty$ 时

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha| \left| D^\beta(\varphi_k)(x) - D^\beta(\varphi_j)(x) \right| &= \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta[\varphi_k(x) - \varphi_j(x)]| \\ &= \rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k - \varphi_j) \to 0. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

(3.1.3) 说明 $\{D^\beta \varphi_k\}$ 是 $C(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列, 由于 $C(\mathbb{R}^n)$ 完备, 因而 $\{D^\beta \varphi_k\}$ 在 $C(\mathbb{R}^n)$ 中收敛, 这等价于 $\{D^\beta \varphi_k\}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中一致收敛. 因此存在函数 φ, 使得对 $\forall\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{D^\beta \varphi\}$ 是 $\{D^\beta \varphi_k\}$ 的极限. 从而, 对 $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $\{x^\alpha D^\beta \varphi\}$ 也是

[1]本书中记号 "$\Longleftrightarrow$" 表示 "当且仅当".

$\{x^\alpha D^\beta \varphi_k\}$ 的极限. 这样 $\rho_{\alpha,\beta}(\varphi) \leqslant \rho_{\alpha,\beta}(\varphi - \varphi_k) + \rho_{\alpha,\beta}(\varphi_k) \leqslant C$, 故 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\{\varphi_k\}$ 在 $\mathscr{S}$ 中收敛于 φ, 从而 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 关于距离 d 完备. □

下面的定理中列出了在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的局部凸拓扑下的几个重要的运算性质.

定理 3.1.3 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 按其拓扑下, 有如下结论:

(a) 对 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及任意的多重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, 映射 $\varphi \mapsto x^\alpha(D^\beta \varphi)$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性算子;

(b) $\mathbb{R}^n$ 上的平移 τ 按 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 拓扑是连续的;

(c) 对 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及 $h = (0, \cdots, h_k, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$, 当 $h \to 0$ 时, $(\varphi - \tau_h \varphi)/h_k$ 收敛到 $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$;

(d) 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 及 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $f * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且对 $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha(f * \varphi)(x) = (f * D^\alpha \varphi)(x)$.

证明 (a) 仅需验证, 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑下, 如果 $\{\varphi_k\}$ 收敛于 0, 那么 $x^\alpha D^\beta \varphi_k$ 收敛于 0. 需证明, 对任意多重指标 $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}_+^n$, 当 $k \to 0$ 时, $\rho_{\gamma,\delta}\big(x^\alpha D^\beta \varphi_k\big) \to 0$. 注意到,

$$\rho_{\gamma,\delta}\big(x^\alpha D^\beta \varphi_k\big) \leqslant C \sum_{\alpha',\beta'} \rho_{\alpha',\beta'}(\varphi_k) \to 0,$$

其中 $|\alpha'| \leqslant |\alpha| + |\gamma|, |\beta'| \leqslant |\beta| + |\delta|$.

(b) 对任意给定的 $h \in \mathbb{R}^n$ 及 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 任取多重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$|x^\alpha D^\beta(\tau_h \varphi(x) - \varphi(x))| = |x^\alpha D^\beta(\varphi(x-h) - \varphi(x))| \leqslant C|x^\alpha D^\beta(\nabla\varphi \cdot h)|.$$

因此

$$\lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta(\tau_h \varphi(x) - \varphi(x))| \leqslant C \lim_{h\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\beta_0} \varphi(x)||h| = 0,$$

其中 $|\beta_0| = |\beta| + 1$.

(c) 对 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta \left(\frac{\varphi - \tau_h \varphi}{h_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \right| &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|x^\alpha D^\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k^2} \cdot \theta h\right| \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^{\tilde{\beta}} \varphi||h_k| \to 0, \quad h_k \to 0.\end{aligned}$$

其中 $|\tilde{\beta}| = |\beta| + 2$.

(d) 设 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 则对任意的有界集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 及 $\forall\, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$,

$$\sup_{x\in E} \big|D^\alpha \varphi(x-y)\big| \leqslant C_{\alpha,E}(1+|y|)^{-n-1}, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.1.4}$$

注意到 $(1+|y|)^{-n-1} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, 因此由 (3.1.4) 知积分

$$(f * D^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) D^\alpha \varphi(x-y) dy$$

在 E 上绝对收敛并一致收敛, 从而微分算子 D 与积分可交换. 由 E 及 α 的任意性便知结论成立. □

推论 3.1.4 对于 $1 \leqslant p < \infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 对于 $p=\infty$, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中按 L^∞ 范数稠密.

证明 设 $1 \leqslant p < \infty$. 由于具紧支集的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的全体 $L_c^p(\mathbb{R}^n)$在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 因此只需说明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $L_c^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密即可. 对任意的 $f \in L_c^p(\mathbb{R}^n)$, 取 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$. 由推论 1.1.4(b), 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $f * \psi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. 再运用定理 1.3.1 知, 当 $\varepsilon \to 0$ 时, $f * \psi_\varepsilon$ 按 L^p 范数收敛于 f.

应用同样的方法可以说明 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中按 L^∞ 范数稠密. □

注意到 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 这样立刻得到

推论 3.1.5 对于 $1 \leqslant p < \infty$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密. 对于 $p=\infty$, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 中按 L^∞ 范数稠密.

§3.1.2 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的 Fourier 变换

下面讨论 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上 Fourier 变换的性质.

定理 3.1.6 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 到自身的同胚. (即：Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一一映上的连续线性算子.)

证明 显然 Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 是线性的.

(i) $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 连续的. 对任意的 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及多重指标 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, 有

$$\begin{aligned}
|x^\alpha (D^\beta \hat{\varphi})(x)| &= |x^\alpha \big((-2\pi i\cdot)^\beta \varphi(\cdot)\big)^\wedge(x)| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}} |\big(D^\alpha[(-2\pi i\cdot)^\beta \varphi(\cdot)]\big)^\wedge(x)| \\
&\leqslant \frac{1}{(2\pi)^{|\alpha|}} \|D^\alpha[(-2\pi i\cdot)^\beta \varphi](\cdot)\|_1 \\
&\leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|t|^2)^n} (1+|t|^2)^n |D^\alpha[(-2\pi i t)^\beta \varphi](t)| dt \\
&\leqslant C \sum_{\alpha', \beta'} \rho_{\alpha', \beta'}(\varphi),
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

这里 $\sum_{\alpha',\beta'}$ 为有限和. 由 (3.1.5) 知 $\mathscr{F}(\varphi)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 设 $\{\varphi_k\}$ 按 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 拓扑收敛于零. 那么由 (3.1.5) 得, $\rho_{\alpha,\beta}(\hat{\varphi}_k)\leqslant C\sum_{\alpha',\beta'}\rho_{\alpha',\beta'}(\varphi_k)\to 0\quad(k\to\infty)$. 故 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续.

(ii) Fourier 变换 $\mathscr{F}$ 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上是一一映上的, 且其逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$ 仍在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续.

因为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$, 由定理 2.1.13 知, $\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的单射. 另一方面, 对 $\forall\, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subset L^1(\mathbb{R}^n)$, 由 (i) 知 $\hat{f}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 又由注 2.1.3 知, 对 $\forall\, x\in\mathbb{R}^n$,

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)e^{2\pi i x\cdot t}dt=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(-t)e^{-2\pi i x\cdot t}dt. \tag{3.1.6}$$

令 $\varphi(x)=\hat{f}(-x)$, 那么 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 且 $\hat{\varphi}(x)=f(x)$. 特别地, (3.1.6) 还说明

$$\mathscr{F}^{-1}f(x)=\mathscr{F}f(-x),\qquad\forall\, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n). \tag{3.1.7}$$

由 (3.1.7) 与结论 (i) 知, $\mathscr{F}^{-1}$ 仍在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续. □

推论 3.1.7 如 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\varphi*\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

证明 由定理 3.1.6, 如果 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $\hat{\varphi},\hat{\psi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 从而 $\hat{\varphi}\cdot\hat{\psi}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 这样 $(\varphi*\psi)\hat{}\,(x)=\hat{\varphi}(x)\hat{\psi}(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 故 $\varphi*\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. □

[注 3.1.3] 对于 Fourier 变换而言, $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 作为基本空间显得过大, 因为 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的很多函数, 如非零常值函数, 在经典意义下没有 Fourier 变换. 另一方面, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 作为基本空间又显得过小, 因为 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的非零函数的 Fourier 变换已不再属于 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (见定理 2.1.6). 然而, 由于 Fourier 变换是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 到自身的同胚 (定理 3.1.6), 因此介于 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 和 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 之间的 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (速降函数空间) 作为 Fourier 变换的基本空间是非常恰当的.

定理 3.1.8 (Fourier 变换的 Parseval 等式) 如 $f,\ g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\hat{g}(x)dx, \tag{3.1.8}$$

且

$$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}dx. \tag{3.1.9}$$

证明 由于二重积分

$$\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}e^{-2\pi i x\cdot t}f(t)g(x)dtdx$$

是绝对收敛的，运用 Fubini 定理即得 (3.1.8). 在 (3.1.8) 的左边用 $\overline{\hat{g}(x)}$ 替换 $g(x)$，并注意到

$$(\ \overline{\hat{g}(\cdot)}\ )^{\wedge}(x)=\overline{g(x)},$$

因此 (3.1.9) 成立. □

$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换性质可归纳如下，其证明是简单的：

表 3.1 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中函数的 Fourier 变换性质

	$f,\,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$	Fourier 变换 (ξ)
(i)	$f(x)$	$\hat{f}(\xi)$
(ii)	$\hat{f}(x)$	$f(-\xi)$
(iii)	$\bar{f}(x)$	$\overline{\hat{f}(-\xi)}$
(iv)	$\tilde{u}(x)$	$\hat{u}(-\xi)$
(v)	$f(x-h)$	$e^{-2\pi i\xi\cdot h}\hat{f}(\xi)$
(vi)	$e^{2\pi ix\cdot h}f(x)$	$\hat{f}(\xi-h)$
(vii)	$f(ax)$, $a\neq 0$	$\lvert a\rvert^{-n}\hat{f}(a^{-1}\xi)$
(viii)	$\frac{\partial f}{\partial x_k}$	$2\pi i\xi_k\hat{f}(\xi)$
(ix)	$P(D)f$	$P(2\pi i\xi)\hat{f}(\xi)$
(x)	$x_kf(x)$	$\frac{i}{2\pi}\frac{\partial\hat{f}}{\partial\xi_k}(\xi)$
(xi)	$P(x)f(x)$	$P(\frac{i}{2\pi}D)\hat{f}(\xi)$
(xii)	$(f*g)(x)$	$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$
(xiii)	$f(x)g(x)$	$(\hat{f}*\hat{g})(\xi)$

§3.2 缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$

§3.2.1 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的基本性质

定义 3.2.1 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函称为广义函数，或分布 (distribution)，其全体记为 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函称为缓增广义函数，或缓增分

布 (tempered distribution). **缓增广义函数的全体称为缓增广义函数空间, 记为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.**

[注 3.2.1] 由于缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素作用于 $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 上是有意义的, 因此任一缓增广义函数可视为 $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ 中的元素. 在此意义下, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\subset\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. 特别地, 上述包含关系是真包含. 例如, 不难验证 $e^{|x|^2}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 但 $e^{|x|^2}\notin\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

例 3.2.1 设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 如果存在 $k\geqslant 0$ 使得 $(1+|x|)^{-k}f\in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$, 则称 f 为缓增 L^p 函数 (当 $p=\infty$ 时简称缓增函数). 容易看出, 每个 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 函数都是缓增 L^p 函数. 此外, 任一多项式都是缓增 L^p 函数.

现说明, 对 $1\leqslant p\leqslant\infty$, 每个缓增 L^p 函数 f 都是缓增广义函数. 事实上, 如下定义泛函 $L=L_f$: 对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$L_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}[(1+|x|)^{-k}f(x)][(1+|x|)^k\varphi(x)]dx.$$

由于 $(1+|\cdot|)^k\varphi\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 因此 L_f 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个线性泛函. 下证其连续性. 任取 $\{\varphi_k\}\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑下, $\varphi_k\to 0$ $(k\to\infty)$. 由 (3.1.1), $\|\varphi_k\|_{p'}\leqslant\sum\rho_{\alpha,0}(\varphi_k)$, 因此 $\|\varphi_k\|_{p'}\to 0$ $(k\to\infty)$. 这样

$$L_f(\varphi_k)\leqslant\|(1+|\cdot|)^{-k}f\|_p\cdot\|\varphi_k\|_{p'}\to 0\ (k\to\infty).$$

即 L_f 在 0 点连续, 从而 $L_f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

例 3.2.2 对 $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 令 $L=L_\mu$:

$$L_\mu(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)d\mu(x),\qquad\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

则 L_μ 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的一个连续线性泛函. 即有 $L_\mu\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 特别地, 当 μ 为 Dirac 测度 $\delta_a\,(a\in\mathbb{R}^n)$ 时,

$$\delta_a(\varphi)=L_{\delta_a}(\varphi)=\varphi(a),\qquad\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

特别地, 当 $a=0$ 时, 对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有 $\delta(\varphi)=\varphi(0)$.

定理 3.2.1 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p\leqslant\infty)$ 与 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 均连续地嵌入到 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 内.

证明 只需证明, 当 $k\to\infty$, 如 $\{f_k\}$ 依 L^p 范数 (或 $\mathscr{M}$ 范数) 收敛到 f, 则 $\{f_k\}$ 也依 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中弱 * 拓扑收敛到 f. 即要证: 对 $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$L_{f_k}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}f_k(x)\varphi(x)dx\longrightarrow L_f(\varphi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\varphi(x)dx.$$

而此由 $\{f_k\}$ 依 L^p 范数（或 $\mathscr{M}$ 范数）收敛到 f 即知成立. □

下面的定理给出了 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上连续线性泛函的某种有界性. 它与线性赋范空间上线性算子的连续性与有界性等价的结论相类似.

定理 3.2.2 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上线性泛函 L 是连续的当且仅当存在常数 C 和非负整数 m,k 使得对 $\forall\ \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$|L(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi). \tag{3.2.1}$$

证明 充分性是显见的. 事实上, 如 $\{\varphi_k\}$ 依 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 拓扑收敛到 0, 那么由 (3.2.1), $|L(\varphi_k)|\to 0\quad (k\to\infty)$. 所以 L 在零点连续. 从而 L 是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上的连续线性泛函.

反之, 因为 L 在零点连续, 故存在 $\varepsilon>0$ 及非负整数 m,k, 使得对 $\forall\ \varphi\in N_{\varepsilon,k,m}$, 有 $|L(\varphi)|\leqslant 1$. 这里 $N_{\varepsilon,k,m}$ 记 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中的零元邻域:

$$N_{\varepsilon,k,m}=\Big\{\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n):\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi)<\varepsilon\Big\}.$$

现对 $\forall\ \varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ (不妨假定 $\varphi\neq 0$, 否则 (3.2.1) 显然成立), 令

$$\|\varphi\|=\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi).$$

取 $\eta<\varepsilon$ 并记 $\psi=\eta\|\varphi\|^{-1}\varphi$, 那么 $\psi\in N_{\varepsilon,k,m}$. 这样 $|L(\psi)|\leqslant 1$. 另一方面 $L(\psi)=\eta\|\varphi\|^{-1}L(\varphi)$. 因此,

$$|L(\varphi)|\leqslant\eta^{-1}\|\varphi\|=\eta^{-1}\sum_{|\alpha|\leqslant k,|\beta|\leqslant m}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi).$$ □

§3.2.2 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的运算

下面讨论缓增广义函数空间 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的运算及其性质.

(i) *卷积*: 对 $\forall\ u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 及 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 u 与 φ 的卷积是一个缓增广义函数, 其定义为:

$$(u*\varphi)(\psi)=u(\tilde{\varphi}*\psi)\qquad\forall\ \psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

定理 3.2.3 如果 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 那么 $(u * \varphi)$ 是一个函数. 对 $x \in \mathbb{R}^n$, $(u * \varphi)(x) = u(\tau_x\tilde{\varphi})$. 如记 $f(x) = u(\tau_x\tilde{\varphi})$, 那么 $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 f 及其各阶导数均为缓增函数.

证明 (1) 首先说明 $f(x) = u(\tau_x\tilde{\varphi})$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数. 记

$$h = (0, \cdots, 0, h_k, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n,$$

那么

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} = \frac{u(\tau_{x+h}\tilde{\varphi}) - u(\tau_x\tilde{\varphi})}{h_k} = u\left(\frac{\tau_{x+h}\tilde{\varphi} - \tau_x\tilde{\varphi}}{h_k}\right).$$

令 $|h| \to 0$, 则由定理 3.1.3(c) 得

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = u\left(-\tau_x\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}\right)\right) = -u\left(\tau_x\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}\right)\right). \tag{3.2.2}$$

下说明 $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ 是连续的. $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$, 由 (3.2.2) 及 u 与 τ 的连续性

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(x+h) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\right| = \left|u\left(\tau_x\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}\right)\right) - u\left(\tau_{x+h}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x_k}\right)\right)\right| \to 0 \quad (|h| \to 0).$$

重复此过程得, 对 $\forall\, \beta, D^\beta f$ 存在且连续, 而且

$$(D^\beta f)(x) = (-1)^{|\beta|} u(\tau_x(D^\beta\tilde{\varphi}).$$

(2) 其次说明 f 是缓增的. 由 (3.2.1) 存在 C, k, m, 使

$$|f(x)| = |u(\tau_x\tilde{\varphi})| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k, |\beta| \leqslant m} \rho_{\alpha,\beta}(\tau_x\tilde{\varphi}). \tag{3.2.3}$$

而

$$\begin{aligned}
\rho_{\alpha,\beta}(\tau_x\tilde{\varphi}) &= \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |t^\alpha D^\beta\tilde{\varphi}(t-x)| \\
&= \sup_{t \in \mathbb{R}^n} |(x+t)^\alpha D^\beta\tilde{\varphi}(t)| \\
&\leqslant C' \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha'| \leqslant |\alpha|} |x|^{|\alpha'|} |t|^{|\alpha|-|\alpha'|} |D^\beta\tilde{\varphi}(t)|.
\end{aligned}$$

由于 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 存在 $C_0 < \infty$ 使得 $\sup_{t\in\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha'| \leqslant |\alpha|} |t|^{|\alpha|-|\alpha'|} |D^\beta\tilde{\varphi}(t)| \leqslant C_0$. 由 (3.2.3) 知存在 $k \in \mathbb{Z}_+$, 使得 $|f(x)| \leqslant C''(1+|x|)^k$. 类似地, 由于对 $\forall\, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\beta\tilde{\varphi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 同样可以说明 $D^\beta f$ 仍是缓增的.

(3) 最后说明 $u*\varphi$ 是函数. 即需要说明对 $\forall\ \psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(u*\varphi)(\psi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)\psi(t)dt.$$

事实上,

$$\begin{aligned}(u*\varphi)(\psi)\quad&=u(\tilde{\varphi}*\psi)=u\left(\int_{\mathbb{R}^n}\tilde{\varphi}(x-t)\psi(t)dt\right)\\&=u\left(\int_{\mathbb{R}^n}\tau_t\tilde{\varphi}(x)\psi(t)dt\right).\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\tau_t\tilde{\varphi}(x)\psi(t)dt&=\lim_{k\to\infty}\int_{|t|\leqslant k}\tau_t\tilde{\varphi}(x)\psi(t)dt\\&=\lim_{k\to\infty}\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_1^n\tau_{t_j}\tilde{\varphi}(x)\psi(t_j)\Delta t_j.\end{aligned}$$

由 u 的连续性及 (3.2.4),

$$\begin{aligned}u\left(\int_{\mathbb{R}^n}\tau_t\tilde{\varphi}(x)\psi(t)dt\right)&=\lim_{k\to\infty}\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_1^n u(\tau_{t_j}\tilde{\varphi})\psi(t_j)\Delta t_j\\&=\lim_{k\to\infty}\int_{|t|\leqslant k}u(\tau_t\tilde{\varphi})\psi(t)dt=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)\psi(t)dt.\end{aligned}$$

□

(ii) **微分**: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\beta\in\mathbb{Z}_+^n$ 为多重指标. 则 u 的偏导数 $D^\beta u$ 定义为:

$$(D^\beta u)(\varphi)=(-1)^{|\beta|}u(D^\beta\varphi),\qquad\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

因此, 缓增广义函数 u 的偏导数 $D^\beta u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

<u>例 3.2.3</u> $\mathbb{R}$ 上的 Heaviside 函数 H 定义为:

$$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

那么在广义函数的意义下, H 的导数恰好为 $\mathbb{R}$ 上的 Dirac 测度 δ. 事实上, 由导数的定义及例 3.2.2, 对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$H'(\varphi)=-H(\varphi')=-\int_0^\infty\varphi'(x)dx=\varphi(0)=\delta(\varphi).$$

[注 3.2.2] $\mathbb{R}^n$ 上的 Heaviside 函数 H 定义为:

$$H(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\begin{cases}1, & x_1>0,\cdots,x_n>0\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

不难证明, 在广义函数的意义下, $H(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是偏微分方程 $\frac{\partial^n H}{\partial x_1\cdots\partial x_n}=\delta$ 的一个解.

(iii) 平移: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $h\in\mathbb{R}^n$. 那么 u 的平移 $\tau_h u$ 定义为:

$$(\tau_h u)(\varphi)=u(\tau_{-h}\varphi),\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

这样缓增广义函数 u 的平移 $\tau_h u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(iv) 线性变换: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, T 为 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的可逆线性变换, 那么 T 对 u 的作用 Tu 定义为:

$$(Tu)(\varphi)=|\det(T)|^{-1}u(T^{-1}\varphi),\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),$$

这里仍用 T 表示相应于变换 T 的 n 阶矩阵且 $\det(T)$ 为其行列式, T^{-1} 为 T 的逆变换, 而 $T^{-1}\varphi(x)=\varphi(T^{-1}x)$. 故缓增广义函数 u 的线性变换 $Tu\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(v) 伸缩: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $a>0$. 那么 u 的伸缩 $\eta_a u$ 定义为:

$$(\eta_a u)(\varphi)=a^{-n}u(\eta_{a^{-1}}\varphi),\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

从而缓增广义函数 u 的伸缩 $\eta_a u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 取 $T:x\to ax$, 运用 (iv) 中定义和结论即可.

(vi) 反射: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 那么缓增广义函数 u 的反射 $\tilde{u}$ 定义为:

$$\tilde{u}(\varphi)=u(\tilde{\varphi}),\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

仍有 $\tilde{u}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 事实上, 取 $T:x\to -x$, 运用 (iv) 中定义和结论即可.

(vii) 乘积: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则缓增广义函数 u 与 Schwartz 函数 φ 的乘积定义为:

$$(u\varphi)(\psi)=u(\varphi\psi),\qquad \forall\,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

因此 $u\varphi\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

(viii) Fourier 变换: 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 那么缓增广义函数 u 的 Fourier 变换 $\hat{u}$ 定义为:

$$\hat{u}(\varphi)=u(\hat{\varphi}),\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

定理 3.2.4 (a) Fourier 变换是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的一一映上的连续线性映射. 因而缓增广义函数 u 的 Fourier 变换是可逆的, 其逆变换 $\check{u}$ 满足:

$$\check{u}(\varphi)=u(\check{\varphi}),\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\tag{3.2.5}$$

其中 $\check{\varphi}$ 记 φ 的 Fourier 逆变换.

(b) 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1\leqslant p\leqslant 2)$, 其作为缓增广义函数的 Fourier 变换和其作为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Fourier 变换是一致的.

证明 (i) 先证 Fourier 变换在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上是连续的. 设 $\{u_k\}\subset\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且在分布意义下 $u_k\to\theta$, 这里 θ 记作 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的零元. 这样, 对 $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $u_k(\varphi)\to 0$. 所以

$$\hat{u}_k(\varphi)=u_k(\hat{\varphi})\to 0,\qquad \forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

此事实说明, 在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中 $\hat{u}_k\to\theta$. 从而, Fourier 变换在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上连续. 设 $u_1,u_2\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 且 $\hat{u}_1=\hat{u}_2$. 那么对 $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$u_1(\varphi)=u_1(\widehat{\check{\varphi}})=\hat{u}_1(\check{\varphi})=\hat{u}_2(\check{\varphi})=u_2(\widehat{\check{\varphi}})=u_2(\varphi).$$

这说明 Fourier 变换在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上是一一的.

对 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 及 $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 注意到由 (3.2.5) 式确定的线性泛函是连续的, 因而 $\check{u}\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 这样对 $\forall u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 及 $\forall\,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$u(\varphi)=u(\check{\hat{\varphi}})=\check{u}(\hat{\varphi})=\widehat{\check{u}}(\varphi).\tag{3.2.6}$$

即有: $u=\widehat{\check{u}}$. 因此 u 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中 $\check{u}$ 的 Fourier 变换, 故 Fourier 变换在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 上是映上的. (3.2.6) 式进一步表明, 对 $\forall\,u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\check{u}$ 是 u 的 Fourier 逆变换.

(ii) 应用乘法公式可说明结论 (b) 对 $p=1,2$ 均成立. 由此进一步可知 (b) 对 $1<p<2$ 亦成立. □

<u>例 3.2.4</u> Dirac 测度 δ 的 Fourier-Stieltjies 变换. 由于对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{\delta}(\varphi)=\delta(\hat{\varphi})=\hat{\varphi}(0)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=\langle 1,\varphi\rangle.$$

由此知 $\hat{\delta}\equiv 1$. 这与例 2.3.2 的结论一致.

<u>例 3.2.5</u> 设 $a\in\mathbb{R}^n$, 那么函数 $e^{2\pi i a\cdot x}$ 的 Fourier 变换为 Dirac 测度 δ_a. 特别地, $\hat{1}=\delta$. 事实上, 如记 $u=e^{2\pi i a\cdot x}$, 则 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{u}(\varphi)=u(\hat{\varphi})=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi i a\cdot x}\hat{\varphi}(x)dx=\varphi(a)=\delta_a(\varphi).$$

下面列出 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中缓增广义函数的 Fourier 变换的主要性质，其验证留作习题.

表 3.2 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中缓增广义函数的 Fourier 变换性质

	$u \in \mathscr{S}', \varphi \in \mathscr{S}$	Fourier 变换
(i)	u	$\hat{u}$
(ii)	$\hat{u}$	$\tilde{u}$
(iii)	$\tilde{u}$	$\tilde{\tilde{u}}$
(iv)	$\tau_h u$	$e^{-2\pi i\xi\cdot h}\hat{u}$
(v)	$e^{2\pi ix\cdot h}u$	$\tau_h\hat{u}$
(vi)	$\eta_a u,\ a \neq 0$	$\|a\|^{-n}\eta_{a^{-1}}\hat{u}$
(vii)	$D^\alpha u$	$(2\pi i\xi)^\alpha\hat{u}$
(viii)	$(-2\pi ix)^\alpha u$	$D^\alpha\hat{u}$
(ix)	$u * \varphi$	$\hat{u}\hat{\varphi}$
(x)	$u\varphi$	$\hat{u} * \hat{\varphi}$

§3.3 与平移可交换算子的刻画

在这一节我们将给出与平移可交换算子的广义函数特征.

定义 3.3.1 设 $\mathscr{V},\mathscr{W}$ 均为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上可测函数组成的的线性空间. B 是 $\mathscr{V} \to \mathscr{W}$ 的线性算子. 如对 $\forall h \in \mathbb{R}^n, \forall f \in \mathscr{V}$, $B(\tau_h f) = \tau_h(Bf)$, 则称 B 为平移可交换算子.

例 3.3.1 固定 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. 那么对 $\forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 令 $B(g) = f*g$. 则 B 为 $L^1(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的平移可交换的线性有界算子. 同样的, 如果固定 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么对 $\forall g \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 令 $T(g) = f * g$. 则 T 为 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ 的平移可交换的线性有界算子.

下面的定理表明, 一切与平移可交换的 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子限制在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上都是卷积型算子.

定理 3.3.1 设 B 是 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p, q \leqslant \infty)$ 的与平移可交换的有界线性算子, 则存在 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 使得对 $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $B\varphi = u * \varphi$.

先给出下面的引理.

引理 3.3.2 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 且具有直到 $n+1$ 阶的 L^p 导数. 那么存在连续函数 g, 满足 $g(x) = f(x)$ a.e., 且

$$|g(0)| \leqslant C_{n,p} \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_p. \tag{3.3.1}$$

证明 (i) $p = 1$ 的情形. 首先有如下事实

$$(1 + |x|^2)^{(n+1)/2} \leqslant (1 + |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)^{n+1} \leqslant C' \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} |x^\alpha|.$$

因此

$$\begin{aligned}|\hat{f}(x)| &\leqslant \frac{C'}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} |x^\alpha \hat{f}(x)| \\ &\leqslant \frac{C''}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} |(D^\alpha f)^\wedge(x)| \\ &\leqslant \frac{C''}{(1+|x|^2)^{(n+1)/2}} \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_1.\end{aligned}$$

两边积分得

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)| dx \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_1.$$

因此 $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由定理 2.1.12 存在连续函数 g, 满足 $g(x) = f(x)$ a.e., 且

$$|g(0)| \leqslant \|\hat{f}\|_1 \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha f\|_1.$$

(ii) $p > 1$ 的情形. 取 $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使得当 $|x| \leqslant 1$ 时 $\varphi(x) = 1$, 当 $|x| > 2$ 时 $\varphi(x) = 0$. 那么 $\varphi f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由 (3.3.1), 存在连续函数 $h(x)$, 满足 $h(x) = \varphi(x) f(x)$ a.e., 且 $|h(0)| \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant n+1} \|D^\alpha(\varphi f)\|_1$. 注意到 $D^\alpha(\varphi f) = \sum_{\mu+\nu=\alpha} C_{\mu,\nu} (D^\mu f)(D^\nu \varphi)$, 有

$$\begin{aligned}\|D^\alpha(\varphi f)\|_1 &\leqslant \sum_{\mu+\nu=\alpha} C_{\mu,\nu} \sup_{|x| \leqslant 2} |D^\nu \varphi(x)| \int_{|x| \leqslant 2} |D^\mu f(x)| dx \\ &\leqslant C \sum_{|\mu| \leqslant |\alpha|} \left(\int_{|x| \leqslant 2} |D^\mu f(x)|^p dx \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

这样在 $|x|\leqslant 1$ 上, $f=h$ a.e., 且 $|h(0)|\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha f\|_p$. 因此只要适当选择 φ, 可以说明在以 0 为中心的任何球上, f 几乎处处等于一个连续函数 g. □

现回到定理 3.3.1 的证明. 首先说明对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $B(\varphi)$ 具有所有阶的 L^q 导数. 事实上, 由定理 3.1.3(c), 如 $h=(0,\cdots,0,h_k,0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^n$, 那么 $\frac{\tau_h\varphi-\varphi}{h_k}$ 依 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 拓扑收敛到 $-\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$ (当然也依 L^p 范数收敛) ($|h|\to 0$). 由于 B 是与平移可交换的有界线性算子, 这样在 L^q 范数意义下

$$\frac{\tau_h(B\varphi)-B\varphi}{h_k}=B\left(\frac{\tau_h\varphi-\varphi}{h_k}\right)\longrightarrow -B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right)\quad(|h|\to 0).$$

此表明 $B\varphi$ 在 L^q 中一阶导数存在, 且

$$\frac{\partial(B\varphi)}{\partial x_k}=B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\right).$$

类似地, 可以证明 $B\varphi$ 具有任意阶的 L^q 导数, 且

$$D^\alpha(B\varphi)=B(D^\alpha\varphi),\quad 对\ \forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),\ \alpha\in\mathbb{Z}_+^n.$$

由引理 3.3.2 知, 存在连续函数 g_φ, 满足 $g_\varphi(x)=B\varphi(x)$ a.e., 且由 (3.1.1) 知

$$\begin{aligned}|g_\varphi(0)| &\leqslant C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|D^\alpha(B\varphi)\|_q=C\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|B(D^\alpha\varphi)\|_q\\ &\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant n+1}\|B\|\cdot\|D^\alpha\varphi\|_p\leqslant C\sum_{|\beta|,|\alpha|\leqslant n+1}\rho_{\alpha,\beta}(\varphi).\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

如果对 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 令 $u_1(\varphi)=g_\varphi(0)$. 那么由 (3.3.2) 及定理 3.2.2 知 $u_1\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 记 $u=\tilde{u}_1$, 则 u 即为所求. 事实上, 由定理 3.2.3,

$$\begin{aligned}(u*\varphi)(x)=u(\tau_x\tilde{\varphi})&=u[(\tau_{-x}\varphi)^{\sim}]=\tilde{u}(\tau_{-x}\varphi)\\ &=u_1(\tau_{-x}\varphi)=g_{\tau_{-x}\varphi}(0)\\ &=B(\tau_{-x}\varphi)(0)=\tau_{-x}(B\varphi)(0)=B\varphi(x).\end{aligned}$$

□

定理 3.3.3 设 B 是 $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant q<p<\infty)$ 的与平移可交换的有界线性算子, 那么 B 为零算子.

证明 首先说明以下事实, 对 $1\leqslant p<\infty$ 及 $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\lim_{|h|\to\infty}\|f+\tau_h f\|_p=2^{1/p}\|f\|_p.\tag{3.3.3}$$

这是因为, (i) 如果 f 具有紧支集, $\operatorname{supp}(f) \subset A$, 那么当 $|h|$ 充分大时, $\operatorname{supp}(f) \bigcap \operatorname{supp}(\tau_h f) = \varnothing$. 这样

$$\begin{aligned}
\|f+\tau_h f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)+f(x-h)|^p dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{\operatorname{supp}(f)} |f(x)|^p dx + \int_{\operatorname{supp}(\tau_h f)} |f(x-h)|^p dx\right)^{1/p} \qquad (3.3.4)\\
&= 2^{1/p}\|f\|_p.
\end{aligned}$$

(ii) 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在具紧支集的函数 g 满足 $\|f-g\|_p < \varepsilon/2^{2+1/p}$. 显然, $\big|\|g\|_p - \|f\|_p\big| < \varepsilon/2^{2+1/p}$, 且对任意的 $h \in \mathbb{R}^n$ 仍有 $\|\tau_h f - \tau_h g\|_p < \varepsilon/2^{2+1/p}$. 由于 g 具有紧支集, 由 (3.3.4) 存在 $N > 0$, 使得当 $|h| > N$ 时, 有 $\big|\|g+\tau_h g\|_p - 2^{1/p}\|g\|_p\big| < \varepsilon/4$. 这样,

$$\begin{aligned}
\big|\|f+\tau_h f\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p\big| &\leqslant \big|\|f+\tau_h f\|_p - \|g+\tau_h g\|_p\big| \\
&\quad + \big|\|g+\tau_h g\|_p - 2^{1/p}\|g\|_p\big| \\
&\quad + \big|2^{1/p}\|g\|_p - 2^{1/p}\|f\|_p\big| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon.
\end{aligned}$$

这样 (3.3.3) 成立. 现回到定理的证明. 对 $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|Bf + \tau_h(Bf)\|_q = \|B(f+\tau_h f)\|_q \leqslant \|B\| \cdot \|f+\tau_h f\|_p.$$

令 $|h| \to \infty$, 由 (3.3.3) 知 $2^{1/q}\|Bf\|_q \leqslant \|B\| \cdot 2^{1/p}\|f\|_p$. 由于 $q < p$, 故

$$\|Bf\|_q \leqslant \|B\| \cdot 2^{1/p-1/q}\|f\|_p \Longrightarrow \|B\| \leqslant \|B\| \cdot 2^{1/p-1/q} \Longrightarrow B = 0. \qquad \square$$

下面我们将给出两类平移可交换算子的广义函数特征.

定义 3.3.2

$$(L^p, L^q) = \{u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \exists C > 0,\ \text{使得}\ \forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), \|u * \varphi\|_q \leqslant C\|\varphi\|_p\}.$$

记 $\mathscr{T}$ 为 $L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ 的平移可交换有界线性算子的全体, 那么由前面的讨论可知, $\mathscr{T}$ 与 (L^p, L^q) 之间是一一对应的. 下面给出 (L^2, L^2) 和 (L^1, L^1) 的特征刻画.

定理 3.3.4 设 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $B\varphi = u * \varphi$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n) \bigcap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子, 那么 $u \in (L^2, L^2)$ 当且仅当存在 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 使在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的意义下, $\hat{u} = b$. 此时有 $\|B\|_{(2,2)} = \|b\|_\infty$.

证明 先证明充分性. 对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, 由表 3.2 (viii) 及广义函数与 Schwartz 函数乘积的定义知

$$\begin{aligned}|\widehat{(u*\varphi)}(\psi)| &= |\hat{u}(\hat{\varphi}\psi)| = |b(\hat{\varphi}\psi)|\\ &= \left|\int b(x)\hat{\varphi}(x)\psi(x)dx\right| \leqslant \|b\hat{\varphi}\|_2\|\psi\|_2\\ &\leqslant \|b\|_\infty\|\varphi\|_2\|\psi\|_2<\infty.\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

因 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, (3.3.5) 表明 $\widehat{(u*\varphi)}\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 从而 $(u*\varphi)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 并且

$$\|u*\varphi\|_2=\|\widehat{(u*\varphi)}\|_2\leqslant\|b\|_\infty\|\varphi\|_2.$$

因此 $u\in(L^2,L^2)$, 且 $\|B\|_{(2,2)}\leqslant\|b\|_\infty$.

反之, 设 $u\in(L^2,L^2)$, 则存在 $C>0$ 使得对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|u*\varphi\|_2\leqslant C\|\varphi\|_2$. 取 $\varphi_0(x)=e^{-\pi|x|^2}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 则 $\Phi(x)=\widehat{(u*\varphi_0)}(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 下面说明, $b(x)=e^{\pi|x|^2}\Phi(x)=\Phi(x)/\hat{\varphi}_0(x)$ 即为所求. 首先, 对一切 $\varphi,\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 由广义函数与 Schwartz 函数乘积的定义,

$$\begin{aligned}\hat{u}(\hat{\varphi}\psi) &= (\hat{u}\hat{\varphi}_0)(\hat{\varphi}\psi/\hat{\varphi}_0)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\Phi(x)}{\hat{\varphi}_0(x)}\hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx\\ &=\int_{\mathbb{R}^n}b(x)\cdot\hat{\varphi}(x)\psi(x)\,dx\\ &=b(\hat{\varphi}\psi).\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

现对 $\forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 取 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得在 $\mathrm{supp}(\psi)$ 上, $\hat{\varphi}=1$ (由定理 1.1.5 这样的 φ 是可取到的), 那么由 (3.3.6)

$$\hat{u}(\psi)=b(\psi),\qquad\forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

由 $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中稠密推出 $\hat{u}=b$. 下面说明 $b\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|b\|_\infty\leqslant\|B\|_{(2,2)}$. 由于 $B(\varphi)=u*\varphi$ 是 $L^2(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\to L^2(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子, 因此对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}\|b\hat{\varphi}\|_2 &= \|\hat{u}\hat{\varphi}\|_2=\|\widehat{(u*\varphi)}\|_2=\|u*\varphi\|_2\\ &\leqslant\|B\|_{(2,2)}\|\varphi\|_2\\ &=\|B\|_{(2,2)}\|\hat{\varphi}\|_2.\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

设 $\mathscr{A}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的单位球, 则对 $\forall f\in\mathscr{A}$, 有 $\|bf\|_2\leqslant\|B\|_{(2,2)}$. 事实上, 由于 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中稠密, 存在 $\{\hat{\varphi}_k\}\subset\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\cap\mathscr{A}$, 使得 $\{\hat{\varphi}_k\}$ 依 L^2 范数收敛

到 f. 因此存在子列 $\{\hat{\varphi}_{k_j}\}$ 几乎处处收敛到 f. 这样由 (3.3.7)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{j\to\infty} |b(x)\hat{\varphi}_{k_j}(x)|^2 dx \\ &\leqslant \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |b(x)\hat{\varphi}_{k_j}(x)|^2 dx \\ &\leqslant \|B\|^2_{(2,2)}.\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

最后说明 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|b\|_\infty \leqslant \|B\|_{(2,2)}$. 若不然, 记

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : |b(x)| > \|B\|_{(2,2)}\},$$

则 $|E| = \delta > 0$. 不妨设 $\delta < \infty$. (否则存在 $k \in \mathbb{N}$, 使得 $0 < |E \cap \{x : |x| < k\}| < \infty$, 此时只需对集合 $E \cap \{x : |x| < k\}$ 讨论即可.) 则 $g(x) = \chi_E(x)\delta^{-1/2} \in \mathscr{A}$, 因此由 (3.3.8) 知, $\|bg\|_2 \leqslant \|B\|_{(2,2)}$. 另一方面

$$\|bg\|_2 = \left(\int_E |b(x)\delta^{-1/2}|^2 dx\right)^{1/2} > \|B\|_{(2,2)}.$$

此矛盾说明 $|E| = 0$. 因此 $b \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 且 $\|b\|_\infty \leqslant \|B\|_{(2,2)}$. □

定理 3.3.5 设 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $B\varphi = u * \varphi$ 是 $L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子. 则 $u \in (L^1, L^1)$ 当且仅当存在 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 使在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 的意义下 $u = \mu$. 此时, $\|B\|_{(1,1)} = \|\mu\|_{\mathscr{M}}$.

证明 充分性的证明. 对 $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 由定理 3.2.3

$$\begin{aligned}\|u * \varphi\|_1 = \|u(\tau_x\tilde{\varphi})\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^n} \big|\mu(\tau_x\tilde{\varphi})\big| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \tau_x\tilde{\varphi}(t) d\mu(t)\right| dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-t)| dx\, |d\mu|(t) = \|\varphi\|_1 \|\mu\|_{\mathscr{M}}.\end{aligned}$$

所以 $u \in (L^1, L^1)$, 且 $\|B\|_{(1,1)} \leqslant \|\mu\|_{\mathscr{M}}$.

反之, 设 $u \in (L^1, L^1)$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $W(x,\varepsilon) = (4\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|x|^2/4\varepsilon} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. 记 $u_\varepsilon(x) = (u * W(\cdot,\varepsilon))(x)$. 这样对 $\forall \varepsilon > 0$ 由命题 1.3.3,

$$\|u_\varepsilon\|_1 = \|(u * W)(\cdot,\varepsilon)\|_1 \leqslant \|B\|_{(1,1)} \|W(\cdot,\varepsilon)\|_1 = \|B\|_{(1,1)}. \tag{3.3.9}$$

(3.3.9) 说明 $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 按 L^1 范数关于 ε 一致有界. 因此 $\{u_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ 按 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 范数仍一致有界. 由于 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n) = (C_0(\mathbb{R}^n))^*$, 而 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 是可分空间, 因

此 $\{u_\varepsilon:\varepsilon>0\}$ 在 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中是弱 * 列紧. 所以存在 $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 以及 $\{\varepsilon_k\}$, 满足 $\varepsilon_k\to 0\ (k\to\infty)$, 使对于 $\forall\varphi\in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)u_{\varepsilon_k}(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)d\mu(x). \tag{3.3.10}$$

对 $\forall\psi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 记 $\psi_\varepsilon(x)=\big(W(\cdot,\varepsilon)*\psi\big)(x)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 因此

$$u(\psi_\varepsilon)=u\big(W(\cdot,\varepsilon)*\psi\big)=\big(u*W(\cdot,\varepsilon)\big)(\psi)=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_\varepsilon(x)dx.$$

在上式中用 ε_k 替代 ε, 并令 $k\to\infty$. 那么由 (3.3.10) 式

$$u(\psi_{\varepsilon_k})=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)u_{\varepsilon_k}(x)dx\to\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\mu(x). \tag{3.3.11}$$

下面证明, 当 $\varepsilon\to 0$ 时在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的拓扑下, $\psi_\varepsilon\to\psi$. 由定理 3.1.3(d), 对 $\forall\beta\in\mathbb{Z}_+^n$,

$$\begin{aligned}|D^\beta(\psi_\varepsilon-\psi)(x)|&=\Big|D^\beta(\psi_\varepsilon)(x)-D^\beta\psi(x)\Big|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\big[D^\beta\psi(x-t)-D^\beta\psi(x)\big]W(t,\varepsilon)dt\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}D^\beta(\psi(x-t)-\psi(x))W(t,\varepsilon)dt\right|\\&=\left|\int_{\mathbb{R}^n}D^\beta\big[\psi(x-\sqrt{\varepsilon}t)-\psi(x)\big](4\pi)^{-n/2}e^{-|t|^2/4}dt\right|.\end{aligned}$$

上式表明当 $\varepsilon\to 0$ 时, 关于 x 一致有 $|D^\beta(\psi_\varepsilon-\psi)(x)|\to 0$. 因此对 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_+^n$,

$$\rho_{\alpha,\beta}(\psi_\varepsilon-\psi)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta(\psi_\varepsilon-\psi)(x)\right|\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

即在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 中 $\psi_\varepsilon\to\psi$. 从而由 u 的连续性及 (3.3.11) 知 $u(\psi)=\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)d\mu(x)$.

最后, 由 (3.3.9) 和 (3.3.10) 式有

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)d\mu(x)\right|\leqslant\|\varphi\|_\infty\sup_k\|u_{\varepsilon_k}\|_1\leqslant\|\varphi\|_\infty\cdot\|B\|_{(1,1)}. \tag{3.3.12}$$

另一方面, 由 Riesz 表示定理知, $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函 $\varphi\mapsto\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)d\mu(x)$ 的范数为 $\|\mu\|_{\mathscr{M}}$. 这样由 (3.3.12) 式, $\|\mu\|_{\mathscr{M}}\leqslant\|B\|_{(1,1)}$. 从而说明了 $\|B\|_{(1,1)}=\|\mu\|_{\mathscr{M}}$. □

对于一般的 (L^p,L^q), 其特征是未知的. 但有如下的对偶定理.

定理 3.3.6 对于 $1\leqslant p,q<\infty$, 如果 $1/p+1/p'=1, 1/q+1/q'=1$, 那么 $(L^p,L^q)=(L^{q'},L^{p'})$.

证明 设 $u \in (L^p, L^q)$, 则存在 $C > 0$, 使得对 $\forall \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\|u*\varphi\|_q \leqslant C\|\varphi\|_p$. 记 $B(\varphi) = u * \varphi$, 那么 B 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有唯一的有界线性扩张. 其共轭算子 B^* 为 $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子. 这样对任意的 $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} (B\varphi)(x)\psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)(B^*\psi)(x)dx.$$

此式表明, 对任意的 $\varphi, \psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(B^*\psi)(\varphi) &= (B\varphi)(\psi) = (u * \varphi)(\psi) = u(\tilde{\varphi} * \psi)\\ &= u[(\tilde{\psi} * \varphi)\tilde{}\,] = \tilde{u}(\tilde{\psi} * \varphi) = (\tilde{u} * \psi)(\varphi).\end{aligned}$$

这样

$$\begin{aligned}\|\tilde{u} * \psi\|_{p'} = \|B^*\psi\|_{p'} &\leqslant \|B^*\|_{L^{q'} \to L^{p'}} \cdot \|\psi\|_{q'}\\ &= \|B\|_{L^p \to L^q} \cdot \|\psi\|_{q'}.\end{aligned}$$

所以 $\tilde{u} \in (L^{q'}, L^{p'})$. 现说明以下事实:

$$\tilde{u} \in (L^{q'}, L^{p'}) \Longleftrightarrow u \in (L^{q'}, L^{p'}). \tag{3.3.13}$$

事实上, 对任意的 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\|\tilde{u} * \varphi\|_{p'} = \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{S} \cap L^p\\ \|\psi\|_p \leqslant 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u} * \varphi)(x)\psi(x)dx \right|.$$

而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\tilde{u} * \varphi)(x)\psi(x)dx &= (\tilde{u} * \varphi)(\psi) = \tilde{u}(\tilde{\varphi} * \psi)\\ &= (u * \tilde{\varphi})(\tilde{\psi}) = \int_{\mathbb{R}^n} (u * \tilde{\varphi})(x)\tilde{\psi}(x)dx.\end{aligned}$$

因此

$$\|\tilde{u} * \varphi\|_{p'} = \sup_{\substack{\tilde{\psi} \in \mathscr{S} \cap L^p\\ \|\tilde{\psi}\|_p \leqslant 1}} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u * \tilde{\varphi})(x)\tilde{\psi}(x)dx \right| = \|u * \tilde{\varphi}\|_{p'}.$$

从而 (3.3.13) 成立. 故 $(L^p, L^q) \subset (L^{q'}, L^{p'})$. 同理可证 $(L^{q'}, L^{p'}) \subset (L^p, L^q)$. □

习 题 三

1. 证明：Schwartz 速降函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$的等价定义为：

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) &= \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \text{ 对 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^\beta(x^\alpha \varphi(x))| < \infty\} \\ &= \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \text{ 对 } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \lim_{|x|\to\infty} x^\alpha D^\beta \varphi(x) = 0\} \\ &= \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \text{ 对 } \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{和} k \geqslant 0, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^k |D^\beta \varphi(x)| < \infty\} \\ &= \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n): \text{ 对 } \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{和} k \geqslant 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} (1+|x|^2)^k D^\beta \varphi(x) = 0\}.\end{aligned}$$

2. 设

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

证明：$\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3. 证明：存在 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 使得 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\operatorname{supp}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}$, 且

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi(2^{-k}x) = 1, \quad x \neq 0.$$

4. 证明：存在 $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 使得 $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, $\operatorname{supp}(\psi) = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leqslant |x| \leqslant 2\}$, 且

$$\int_0^\infty \frac{\psi(x)}{x} dx = 1.$$

5. 对 $\varepsilon > 0$, 记 $\mathscr{S}_\varepsilon = \{\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) : \hat{\varphi}(\xi) = 0 \quad \text{当} \quad |\xi| \leqslant \varepsilon\}$. 令 $\mathscr{S}_0 = \bigcup_{\varepsilon>0} \mathscr{S}_\varepsilon$. 证明：对任意的 $2 \leqslant p < \infty$, $\mathscr{S}_0$ 在 $L^p(\mathbb{R})$ 中稠密.

6. 如对任意的 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $u(\varphi) = \sum_{k=1}^\infty \varphi(k)$. 证明：$u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

7. 找出满足如下条件的 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$:

$$u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(t)}{t} dt, \qquad \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \text{ 且 } \varphi(0) = 0.$$

8. 验证表 3.2 中的结论.

第四章　调和函数

§4.1　$\mathbb{R}^n$ 上的调和函数的基本性质

§4.1.1　均值定理和最大值原理

本章中 Ω 记 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 即 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开集.

定义 4.1.1　设 u 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 中区域 Ω 内的函数. 如果 $u \in C^2(\Omega)$, 且对 $\forall x \in \Omega$, u 满足 Laplace 方程 $\Delta u(x) = 0$, 则称 u 为 Ω 内的调和函数, 其中 $\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ 称为 Laplace 算子.

不难看出, 如 $n = 1$, 那么 u 在 $\mathbb{R}$ 中调和当且仅当 $u(x) = ax + b$. 此外, 直接验证可知 Poisson 核 $P_y(x) = c_n \frac{y}{(y^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}$ 是 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的调和函数, 且

$$\Gamma(x) = \begin{cases} |x|^{2-n}, & n \geqslant 3, \\ \log|x|, & n = 2, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

也在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中调和.

运用调和函数的定义可得下面的结论:

命题 4.1.1 (运算与调和函数的关系) 如果 u 在 Ω 内调和, 则

(i) (平移不变性) 对 $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $\tau_h u$ 在 $\Omega + h = \{x + h : x \in \Omega\}$ 内调和;

(ii) (旋转不变性) 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意的旋转 ρ, $u(\rho x)$ 在 $\rho^{-1}\Omega = \{\rho^{-1}x : x \in \Omega\}$ 内调和;

(iii) (伸缩不变性) 对 $\forall a > 0$, $u(ax)$ 在 $a^{-1}\Omega = \{x/a : x \in \Omega\}$ 内调和.

在研究调和函数的其他性质之前, 先给出一些记号. 记 $B(x,r)$为 $\mathbb{R}^n$ 中以 x 为中心, r 为半径的开球体. $\Sigma_x(r)$为其边界, 即 $\Sigma_x(r) = \{t \in \mathbb{R}^n : |t - x| = r\}$. 简记 $B(0,r)$ 为 $B(r)$, $\Sigma_0(r)$ 为 $\Sigma(r)$. 因此 $\Sigma(1) = \mathbb{S}^{n-1}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球面. 函数 u 在 $\Sigma_x(r)$ 上的面平均定义为:

$$\mathcal{M}_{x,r}(u) = \frac{1}{\omega_{n-1} r^{n-1}} \int_{\Sigma_x(r)} u(s)ds = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x + rt')dt',$$

其中 ds 为 $\Sigma_x(r)$ 的面积元, dt' 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的面积元.

定理 4.1.2 (调和函数的球面均值性质) 设 u 在区域 Ω 内调和. 如果球 $B(x,r_0)\subset\Omega$, 那么对 $0<r\leqslant r_0$, 有 $u(x)=\mathcal{M}_{x,r}(u)$.

证明 (i) 设 $\mathcal{E}$ 是 Ω 中任一个具有充分光滑边界 $\partial\mathcal{E}\subset\Omega$ 的子域. 记 u 在 $\partial\mathcal{E}$ 上的外法向导数为 $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$, 则

$$\int_{\partial\mathcal{E}}\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,ds=0. \tag{4.1.2}$$

事实上, 令 $v(x)\equiv 1$ $(x\in\bar{\mathcal{E}})$, 应用 Green 公式:

$$\int_{\mathcal{E}}(u\Delta v-v\Delta u)dx=\int_{\partial\mathcal{E}}\left(u\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}-v\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)ds,$$

并注意到 $\Delta v=\Delta u=0$ 及 $\frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}=0$, 得到 (4.1.2).

(ii) 由调和函数的平移不变性, 只需讨论 $x=0$ 的情形. 任取 ε 满足 $0<\varepsilon<r\leqslant r_0$, 则 (4.1.1) 中定义的函数 Γ 在 $B=B(r)\setminus\overline{B(\varepsilon)}$ 内调和. 下仅证 $n\geqslant 3$ 的情形. ($n=2$ 的情形类似可证.) 注意到,

$$\text{在 }\Sigma^+(r)\text{ 上},\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}=\left.\frac{d\Gamma(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=r}=(2-n)r^{1-n}, \tag{4.1.3}$$

$$\text{在 }\Sigma^-(\varepsilon)\text{ 上},\qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}=-\left.\frac{d\Gamma(\rho)}{d\rho}\right|_{\rho=\varepsilon}=-(2-n)\varepsilon^{1-n}, \tag{4.1.4}$$

这里及下面, Σ^+ 和 Σ^- 分别表示沿球面 Σ 的法线方向指向球面外侧和指向球心. 由于 u,Γ 均在 B 上调和, 由 Green 公式以及 (4.1.2) 式有

$$0=\int_B(u\Delta\Gamma-\Gamma\Delta u)dx=\int_{\partial B}\left(u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}-\Gamma\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\right)ds=\int_{\partial B}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\,ds.$$

由 (4.1.3) 和 (4.1.4) 式得

$$\begin{aligned}0&=\int_{\Sigma^+(r)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\,ds+\int_{\Sigma^-(\varepsilon)}u\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathbf{n}}\,ds\\&=\int_{\Sigma(r)}u\cdot(2-n)r^{1-n}\,ds-\int_{\Sigma(\varepsilon)}u\cdot(2-n)\varepsilon^{1-n}\,ds.\end{aligned}$$

即

$$\frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int_{\Sigma(\varepsilon)}u(x)\,ds=\frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{\Sigma(r)}u(x)\,ds.$$

这样由 u 在 0 点连续, 得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{0,r}(u) &= \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{\Sigma(r)} u(x)\,ds \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}\varepsilon^{n-1}}\int_{\Sigma(\varepsilon)} u(x)\,ds \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(\varepsilon t')dt' \to u(0) \quad (\varepsilon \to 0).\end{aligned}$$

因此对任意的 $x \in \Omega$, 均值定理恒成立. □

定理 4.1.3 (调和函数的最大值原理) 设 u 为 Ω 内的实值调和函数, 且满足 $A = \sup\limits_{x\in\Omega} u(x) < \infty$. 那么或者 u 在 Ω 中取常值 A, 或者对 $\forall x \in \Omega$, 有 $u(x) < A$.

证明 令 $E = \{t \in \Omega : u(t) = A\}$. 如 $E = \varnothing$, 则结论成立. 现不妨假设 $E \neq \varnothing$. 先说明 E 为闭集. 因 u 在 Ω 内连续, 任取 E 中的点列 $\{x_k\}$, 满足 $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. 则 $u(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} u(x_k) = A$. 从而 $x_0 \in E$. 即 E 为闭集. 下说明 E 亦为开集. $\forall x_0 \in E$, 则存在 $r_0 > 0$ 使得 $B(x_0, r_0) \subset \Omega$. 由球面均值性质, 对 $\forall r, 0 \leqslant r < r_0$,

$$A = u(x_0) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x_0 + rt')dt'.$$

这样在 $\Sigma_{x_0}(r)$ $(0 \leqslant r < r_0)$ 上恒有 $u(t) = A$. 事实上, 如存在 $t_0 \in \Sigma_{x_0}(r)$ 使得 $u(t_0) < A$, 那么由 u 的连续性知, 存在 $\Lambda \subset \Sigma_{x_0}(r)$, 使 $t_0 \in \Lambda$ 且 $|\Lambda| > 0$, 且在 Λ 上 $u(t) < A$. 这样

$$\begin{aligned}A - u(x_0) &= \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{\Sigma_{x_0}(r)} [A - u(t)]\,ds \\ &\geqslant \frac{1}{\omega_{n-1}r^{n-1}}\int_{\Lambda} [A - u(t)]\,ds > 0.\end{aligned}$$

但此与 $u(x_0) = A$ 矛盾. 这一事实说明, 对 $\forall x \in B(x_0, r_0)$, 恒有 $u(x) = A$. 因此 $B(x_0, r_0) \subset E$, 故 E 为开集. 这样 $E \subset \Omega$ 为既开又闭的集合. 由于 Ω 是连通的, 因此或者 $E = \varnothing$, 或者 $E = \Omega$. 因此, 或者 u 在 Ω 中取值恒为 A, 或者 u 在 Ω 中恒小于 A. □

[注 4.1.1] 调和函数最大值原理的意义在于, 区域 Ω 内定义的非常值调和函数在 Ω 内不能达到其上确界.

定理 4.1.4 (Liouville 定理) $\mathbb{R}^n$ 上有界的调和函数必为常值函数.

证明 设 u 为 $\mathbb{R}^n$ 上有界的调和函数. 首先说明, 调和函数不仅具有关于球面的均值性质, 也满足球体均值性质. 记 $v_n = \dfrac{\omega_{n-1}}{n}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位球的体积. 由定理 4.1.2, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 及 $r > 0$,

$$\begin{aligned} u(x) &= u(x) \cdot \frac{n}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{n}{r^n} \int_0^r \mathcal{M}_{x,\rho}(u) \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{n}{\omega_{n-1}} \cdot \frac{1}{r^n} \int_0^r \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+\rho y') dy' \right\} \rho^{n-1} d\rho \\ &= \frac{1}{v_n r^n} \int_{|y| \leqslant r} u(x+y) dy \\ &= \frac{1}{v_n r^n} \int_{|x-y| \leqslant r} u(y) dy. \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

由 (4.1.5) 对任意取定的 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 及 $r > 0$ 有

$$|u(x_1) - u(x_2)| = \frac{1}{v_n r^n} \left| \int_{B(x_1,r)} u(y) dy - \int_{B(x_2,r)} u(y) dy \right|.$$

注意到当 r 充分大时, $B(x_1, r)$ 与 $B(x_2, r)$ 必定相交. 因此有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{v_n r^n} \left| \int_{B(x_1,r)} u(y) dy - \int_{B(x_2,r)} u(y) dy \right| \\ &\qquad\qquad \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{v_n r^n} \left(\int_{B(x_1,r) \setminus B(x_2,r)} dy + \int_{B(x_2,r) \setminus B(x_1,r)} dy \right). \end{aligned}$$

即有

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{v_n r^n} |B(x_1, r) \triangle B(x_2, r)|, \tag{4.1.6}$$

其中 $B(x_1, r) \triangle B(x_2, r)$ 为 $B(x_1, r)$ 与 $B(x_2, r)$ 的对称差. 现取 $r > d = |x_1 - x_2|$, 那么

$$|B(x_1, r) \triangle B(x_2, r)| \leqslant v_n[(r+d)^n - (r-d)^n] = O(r^{n-1}).$$

由 (4.1.6) 知定理的结论成立. □

定理 4.1.5 (Liouville 定理) $\mathbb{R}^n$ 上取正值的调和函数必为常值函数.

证明 设 u 为 $\mathbb{R}^n$ 上正的调和函数. 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 取 $r > |x|$, 那么由 (4.1.5),

$$\begin{aligned} u(x) - u(0) &= \frac{1}{v_n r^n} \left(\int_{B(x,r)} u(y) dy - \int_{B(r)} u(y) dy \right) \\ &\leqslant \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x,r) \triangle B(r)} u(y) dy. \end{aligned}$$

注意到 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中取正值, 因此

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(0)| &\leqslant \frac{1}{v_n r^n}\int_{B(x,r)\triangle B(r)} u(y)dy \\
&\leqslant \frac{1}{v_n r^n}\int_{B(r+|x|)\setminus B(r-|x|)} u(y)dy \\
&= \frac{1}{v_n r^n}\int_{B(r+|x|)} u(y)dy - \frac{1}{v_n r^n}\int_{B(r-|x|)} u(y)dy \\
&= u(0)\cdot\frac{(r+|x|)^n-(r-|x|)^n}{r^n}.
\end{aligned}$$

令 $r\to\infty$ 得, $u(x)=u(0)$. 即 u 在 $\mathbb{R}^n$ 中为常值函数. □

下面的定理说明均值性质完全刻画了调和函数.

定理 4.1.6 设 $u\in C^2(\Omega)$. 对任意的球 $B(x,r)$, 如果 $\overline{B(x,r)}\subset\Omega$, 有 $u(x)=\mathcal{M}_{x,r}(u)$, 那么 u 在 Ω 内调和.

证明 对任意固定的 $x\in\Omega$, 记 $u_k=\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $u_{kj}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}$ 及

$$\mathcal{M}''_{x,0}(u)=\lim_{r\to 0}\frac{d^2}{dr^2}\mathcal{M}_{x,r}(u).$$

那么

$$\frac{d}{dr}[u(x+rt')]=\sum_{k=1}^n u_k(x+rt')t'_k$$

及

$$\frac{d^2}{dr^2}[u(x+rt')]=\sum_{k=1}^n t'_k\Big(\sum_{j=1}^n u_{kj}(x+rt')t'_j\Big)=\sum_{k,j=1}^n u_{kj}(x+rt')t'_kt'_j.$$

所以

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dr^2}\mathcal{M}_{x,r}(u) &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{d^2}{dr^2}[u(x+rt')]dt' \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{k,j=1}^n u_{kj}(x+rt')t'_kt'_j\,dt'.
\end{aligned}$$

令 $r\to 0$, 得到

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}''_{x,0}(u) &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{k,j=1}^n\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_{kj}(x)t'_kt'_j\,dt' \\
&= \frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{k,j=1}^n u_{kj}(x)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t'_kt'_j\,dt'.
\end{aligned}\tag{4.1.7}$$

现说明, 如有

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t'_k t'_j \, dt' = \begin{cases} \dfrac{\omega_{n-1}}{n} & j = k, \\ 0 & j \neq k, \end{cases} \tag{4.1.8}$$

那么由 (4.1.7), (4.1.8) 知 $\mathcal{M}''_{x,0}(u) = \dfrac{1}{n}\Delta u$. 另一方面, 由 $u(x) = \mathcal{M}_{x,r}(u)$ 知, 左边关于 r 为常数. 因此 $\Delta u = n\mathcal{M}''_{x,0}(u) = 0$, 从而 u 在 Ω 内调和. 因此剩下只需证明 (4.1.8) 式. 当 $j = k$ 时,

$$\omega_{n-1} = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} dt' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} (t_1'^2 + t_2'^2 + \cdots + t_n'^2) dt' = n \int_{\mathbb{S}^{n-1}} t_k'^2 dt',$$

因此

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t_k'^2 dt' = \frac{\omega_{n-1}}{n}.$$

当 $j \neq k$ 时, 定义 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转

$$\rho(x_1, \cdots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \cdots, x_n).$$

如记 $f(t) = t'_j t'_k$, 那么

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t) dt' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho(t)) dt'.$$

这样

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t'_j t'_k dt' = -\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t'_j t'_k dt'.$$

故当 $j \neq k$ 时, $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} t'_j t'_k dt' = 0$. 即 (4.1.8) 式成立. □

事实上, $u \in C^2(\Omega)$ 的条件还可以减弱.

定理 4.1.7 (调和函数的球面均值特征) 设 $u \in C(\Omega)$, 且对任意满足 $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ 的球 $B(x,r)$, 有 $u(x) = \mathcal{M}_{x,r}(u)$. 那么 u 在 Ω 内调和, 且 $u \in C^\infty(\Omega)$.

证明 任取 $x_0 \in \Omega$, 那么存在 $r_0 > 0$ 使得 $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \Omega$. 取径向函数 $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 满足

$$\text{supp}(\varphi) \subset \{x : |x| \leqslant 1\} \quad 及 \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 记 $\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. 对 $\forall x \in B(x_0, r_0)$, 令 $u_\varepsilon(x) = (u * \varphi_\varepsilon)(x)$, 显然

$u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 并且

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x) &= \int_{|t|\leqslant\varepsilon} u(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt \\ &= \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x-rt')\varphi_\varepsilon(r)r^{n-1}dt'\,dr \\ &= \int_0^\varepsilon r^{n-1}\varphi_\varepsilon(r)\,\omega_{n-1}\left(\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x-rt')dt'\right)dr. \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

只要取 ε 充分小, 有 $x-\varepsilon t' \in B(x_0, r_0)$. 那么对任意的 r, $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon$, $u(x) = \mathcal{M}_{x,r}(u)$. 由 (4.1.9)

$$u_\varepsilon(x) = \omega_{n-1}u(x)\int_0^\varepsilon r^{n-1}\varphi_\varepsilon(r)\,dr = u(x)\int_{|t|\leqslant\varepsilon}\varphi_\varepsilon(x)\,dx = u(x). \tag{4.1.10}$$

(4.1.10) 式告诉我们, 对 $\forall x \in B(x_0, r_0)$, 只要 $\varepsilon > 0$ 充分小, 在 $B(x,\varepsilon)$ 中 u 便与一个 $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数等同. 注意到微分是个局部性质以及 $x_0 \in \Omega$ 的任意性知 $u \in C^\infty(\Omega)$. 运用定理 4.1.6 的结论知 u 在 Ω 内调和. □

推论 4.1.8 设 $\{u_k\}$ 为区域 Ω 内调和函数列. 如 $\{u_k\}$ 在 Ω 的每一个紧子集上一致收敛于 u, 那么 u 在 Ω 内调和.

证明 因为 Ω 为区域, u_k 均在 Ω 内调和, 因此 u_k 均在 Ω 内连续. 又由 $\{u_k\}$ 在 Ω 的每一个紧子集上一致收敛于 u, 故可知 u 在 Ω 内连续. 为证明 u 在 Ω 内调和, 由定理 4.1.7, 只需说明 u 在 Ω 内满足均值性质即可.

任取 $x \in \Omega$, 那么存在 $r_0 > 0$, 使得 $\overline{B(x, r_0)} \subset \Omega$. 由调和函数均值定理 (定理 4.1.2) 知, 对任意的 k 以及 $0 < r \leqslant r_0$, 有 $u_k(x) = \mathcal{M}_{x,r}(u_k)$. 由于 $\{u_k\}$ 在 $\Sigma_x(r)$ 上一致收敛于 u, 因此

$$\begin{aligned} u(x) &= \lim_{k\to\infty}\mathcal{M}_{x,r}(u_k) \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u_k(x+rt')dt' \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\lim_{k\to\infty} u_k(x+rt')dt' \\ &= \frac{1}{\omega_{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x+rt')dt' = \mathcal{M}_{x,r}(u). \end{aligned}$$

即 u 在 Ω 内满足均值性质. □

推论 4.1.9 (调和函数的球体均值特征) 设 $u \in C(\Omega)$. 则 u 在 Ω 内调和的充分必要条件是对任意满足 $\overline{B(x,r)} \subset \Omega$ 的球 $B(x,r)$, 下面的等式成立:

$$\mathcal{M}_{x,r}(u) = \mathcal{V}_{x,r}(u). \tag{4.1.11}$$

这里 $\mathcal{V}_{x,r}(u)$ 称为 u 在球 $B(x,r)$ 上的体平均, 其定义为:

$$\mathcal{V}_{x,r}(u)=\frac{1}{v_n r^n}\int_{B(x,r)}u(y)dy.$$

证明 如 u 在 Ω 内调和, 那么由定理 4.1.2 和 (4.1.5) 即知 (4.1.11) 成立. 下证充分性. 设 $\overline{B(a,R)}\subset\Omega$. 对任意的 $0<r<R$, 由 (4.1.11) 式有

$$\frac{1}{v_n r^n}\int_{B(a,r)}u(y)dy=\frac{1}{nv_n r^{n-1}}\int_{\Sigma_a(r)}u(s)ds.$$

因此

$$n\int_0^r\left(\int_{\Sigma_a(t)}u(s)ds\right)dt=r\int_{\Sigma_a(r)}u(s)ds.$$

令

$$\varphi(r)=\int_{\Sigma_a(r)}u(s)ds,$$

那么

$$n\int_0^r\varphi(t)dt=r\varphi(r).$$

两边关于 r 微分知 φ 满足以下微分方程:

$$r\varphi'(r)+(1-n)\varphi(r)=0.$$

从而存在与 r 无关的常数 c 使得 $\varphi(r)=cr^{n-1}$. 故由 (4.1.11) 式

$$\frac{c}{nv_n}=\frac{\varphi(r)}{nv_n r^{n-1}}=\mathcal{M}_{a,r}(u)=\mathcal{V}_{a,r}(u).\tag{4.1.12}$$

(4.1.12) 表明 u 在 $B(a,r)$ 上的体平均 $\mathcal{V}_{a,r}(u)$ 与 r 无关. 由 u 的连续性, 至少存在 $B(a,r)$ 内一点 x_0 使得 $u(x_0)$ 等于均值 $\mathcal{V}_{a,r}(u)$. 又注意到 (4.1.12) 式对任意小的 r 均成立, 故必然有 $x_0=a$. 再次应用 (4.1.12) 式及定理 4.1.7 知 u 在 Ω 内调和. □

[注 4.1.2] 推论 4.1.9 中函数的连续性是必需的. 事实上, 如果 u 为 Ω 内的调和函数, 而 v 与 u 仅在有限个点上取值不同. 那么 v 仍满足 (4.1.11) 式, 但它显然不是 Ω 内的调和函数.

定理 4.1.10 (Harnack 不等式) 设 u 为 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 内的非负调和函数, 那么对 Ω 内的任一有界子域 Ω_1, 如 $\overline{\Omega}_1\subset\Omega$, 则存在常数 $C=C(n,\Omega,\Omega_1)>0$, 使得

$$\sup_{x\in\Omega_1}u(x)\leqslant C\inf_{x\in\Omega_1}u(x).$$

证明 不妨设 u 不为常值函数. 对任一 $x_0 \in \Omega$, 取 $r > 0$ 使得 $\overline{B(x_0, 4r)} \subset \Omega$. 对 $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, r)$, 由 (4.1.5)

$$u(x_1) = \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x_1,r)} u(y)dy \leqslant \frac{1}{v_n r^n} \int_{B(x_0,2r)} u(y)dy,$$

且

$$u(x_2) = \frac{1}{v_n (3r)^n} \int_{B(x_2,3r)} u(y)dy \geqslant \frac{1}{v_n (3r)^n} \int_{B(x_0,2r)} u(y)dy.$$

因此, 对 $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, r)$, $u(x_1) \leqslant 3^n u(x_2)$. 这样

$$\sup_{x \in B(x_0,r)} u(x) \leqslant 3^n \inf_{x \in B(x_0,r)} u(x). \tag{4.1.13}$$

由于 Ω_1 有界且 $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, 故存在 $x_1, x_2 \in \Omega_1$ 使得

$$u(x_1) = \sup_{x \in \Omega_1} u(x) \qquad 及 \qquad u(x_2) = \inf_{x \in \Omega_1} u(x).$$

设 γ 是含在 $\overline{\Omega}_1$ 中并连接 x_1, x_2 的弧线. 现取 $r > 0$ 使得 $4r < \inf\{|y - y'| : y \in \partial\Omega, y' \in \partial\Omega_1\}$. 由 Heine-Borel 有限覆盖定理, 存在正整数 $k = k(\Omega, \Omega_1)$, 使得 $\overline{\Omega}_1$ 被最多 k 个半径为 r 的球所覆盖. 从而 γ 被最多 $\ell\,(\ell \leqslant k)$ 个半径为 r 的球所覆盖. 从 x_1 所在的球开始, 在每个球中依次运用 (4.1.13) 式, 便可得 $u(x_1) \leqslant 3^{kn} u(x_2)$. □

推论 4.1.11 设 $\{u_k\}$ 为区域 Ω 内单增调和函数列. 如存在 $y \in \Omega$, 使得 $\{u_k(y)\}$ 收敛, 那么对 Ω 内任一包含 y 的有界子域 Ω_1, $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\{u_k\}$ 在 Ω_1 中一致收敛于一个调和函数.

证明 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得当 $j \geqslant k > N$ 时有 $0 \leqslant |u_j(y) - u_k(y)| < \varepsilon$. 由 Harnack 不等式

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in \Omega_1} (u_j(x) - u_k(x)) &\leqslant C \inf_{x \in \Omega_1} (u_j(x) - u_k(x)) \\
&\leqslant C(u_j(y) - u_k(y)) \\
&< C\varepsilon.
\end{aligned} \tag{4.1.14}$$

此处 C 仅与 n, Ω, Ω_1 有关. 由 (4.1.14) 及推论 4.1.8 知 $\{u_k\}$ 在 Ω_1 中的极限函数在 Ω_1 内调和. □

§4.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中球内 Dirichlet 问题的解及其应用

经典的Dirichlet 问题是：设 Ω 为 $\mathbb{R}^n$ 中的有界区域, f 为定义在其边界 $\partial\Omega$ 上的连续函数, 那么是否存在一个在 $\bar{\Omega}$ 上的连续函数 u, 满足：

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

如果这样的 u 存在, 那么 u 是唯一的 (见习题四 (2)). 先看 Ω 为单位球的情形. 我们将指出, 运用单位球上的 Poisson 核 便可解决单位球内的 Dirichlet 问题.

定义 4.1.2 $\mathbb{R}^n$ 中单位球上的 Poisson 核 $p(s',x)$ 定义为：

$$p(s',x) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-|x|^2}{|x-s'|^n} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-r^2}{(1-2r\cos\theta+r^2)^{n/2}}.$$

其中 $r = |x| < 1$, $|s'| = 1$, θ 为 x 与 s' 的夹角, $\cos\theta = \dfrac{x \cdot s'}{r}$.

定理 4.1.12 单位球上的 Poisson 核 $p(s',x)$ 具有如下性质：

(a) $\forall s' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 及 $|x| < 1$, $p(s',x) > 0$;

(b) 当 $|x| < 1$ 时, $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} p(s',x)ds' = 1$;

(c) 对 $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 令 $x = rx'$ $(0 < r < 1)$. 则对任意的 $\delta > 0$, 极限

$$\lim_{r\to 1} \int_{|s'-x'|>\delta} p(s',rx')ds' = 0$$

关于 $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 一致成立.

证明 (a) 显然成立.

(b) 的证明：通过直接计算可知, 对 $\forall s' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $p(s',x)$ 关于 x 在 $|x| < 1$ 内调和. (实际上可验证, $p(s',x)$ 关于 x 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{s'\}$ 内调和.) 由调和函数均值定理 (定理 4.1.2) 知,

$$\begin{aligned} 1 &= \omega_{n-1}p(s',0) = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \omega_{n-1}p(s',rx')dx' \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} p(s',rx')dx'. \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

注意到 $s', x' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 计算内积得 $|rx' - s'| = |rs' - x'|$. 这样

$$p(s',rx') = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-r^2}{|rx'-s'|^n} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-r^2}{|rs'-x'|^n} = p(x',rs').$$

由 (4.1.15) 及上式知 (b) 成立.

(c) 的证明. 注意到

$$
\begin{aligned}
|s'-x|^2 = |s'-rx'|^2 &= 1-2rs'\cdot x'+r^2 \\
&= (1-r)^2+2r(1-\cos\theta) > 2r(1-\cos\theta).
\end{aligned}
$$

另一方面, $\delta^2 < |s'-x'|^2 = 2(1-\cos\theta)$, 因此 $|s'-x|^2 > r\delta^2$. 这样

$$
\begin{aligned}
\int_{|s'-x'|>\delta} p(s',rx')ds' &= \int_{|s'-x'|>\delta} \frac{1}{\omega_{n-1}} \frac{1-r^2}{|x-s'|^n} ds' \\
&\leqslant \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{|s'-x'|>\delta} \frac{1-r^2}{(r\delta^2)^{n/2}} ds' \\
&\leqslant \frac{1-r^2}{r^{n/2}\delta^n} \to 0 \quad (r\to 1).
\end{aligned}
$$

很清楚, 上面的极限关于 $x'\in\mathbb{S}^{n-1}$ 是一致的. □

运用单位球上的 Poisson 核 $p(s',x)$ 的性质, 可以解决单位球内的 Dirichlet 问题.

定理 4.1.13 设 f 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上连续. 函数

$$
u(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t')p(t',x)dt', & |x|<1, \\ f(x), & |x|=1, \end{cases}
$$

在 $|x|<1$ 内调和, 在 $|x|\leqslant 1$ 上连续.

证明 首先证明 u 在 $|x|<1$ 内调和. 由定理 4.1.7, 只需说明 u 在 $|x|<1$ 内连续并且在 $|x|<1$ 内满足均值性质. 对任意的 $|x|<1$ 及 $h\in\mathbb{R}^n$ 使得 $|x+h|<1$, 由 Poisson 核 $p(t',x)$ 在单位球内的连续性,

$$
|u(x+h)-u(x)| \leqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(t')||p(t',x+h)-p(t',x)|dt' \to 0, \qquad \text{当 } |h|\to 0.
$$

另一方面, 任取 $x_0\in B(1)$ 及 $0<r<1-|x_0|$, 则 $B(x_0,r)\subset B(1)$. 由 $p(s',x)$ 在单位球内的调和性, 我们得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} u(x_0+rt')dt' &= \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(s')p(s',x_0+rt')ds' \right) dt' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(s') \left(\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} p(s',x_0+rt')dt' \right) ds' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(s')p(s',x_0)ds' = u(x_0).
\end{aligned}
$$

下面说明 u 在 $|x| \leqslant 1$ 上连续. 显然只需讨论 u 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的连续性. 任取 $x_0' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 首先证明当 x 沿 x_0' 同一向径趋于 x_0' 时, u 是连续的. 由条件可知 f 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一致连续. 因此对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$ 使得对任意的 $s', t' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 当 $|s' - t'| \leqslant \delta$ 时有

$$|f(s') - f(t')| < \varepsilon. \tag{4.1.16}$$

现记 $x = rx_0'$, $0 \leqslant r < 1$. 对上述 $\delta > 0$, 由定理 4.1.12(b) 有

$$\begin{aligned}|u(x) - u(x_0')| &\leqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(s') - f(x_0')| p(s', rx_0') ds' \\ &= \int_{|s' - x_0'| \leqslant \delta} |f(s') - f(x_0')| p(s', rx_0') ds' \\ &\quad + \int_{|s' - x_0'| > \delta} |f(s') - f(x_0')| p(s', rx_0') ds' \\ &:= I_1 + I_2.\end{aligned}$$

对于 I_1, 由 (4.1.16) 及定理 4.1.12(b) 有

$$I_1 = \int_{|s' - x_0'| \leqslant \delta} |f(s') - f(x_0')| p(s', rx_0') ds' < \varepsilon.$$

另一方面, 由 f 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上连续知存在常数 $C > 0$ 使得

$$\sup_{x' \in \mathbb{S}^{n-1}} |f(x')| \leqslant C. \tag{4.1.17}$$

应用 (4.1.17) 及定理 4.1.12(c), 当 $x \to x_0'$ (等价地, $r \to 1$) 时,

$$I_2 \leqslant 2C \int_{|s' - x_0'| > \delta} p(s', rx_0') ds' \to 0.$$

因此对任意的 $x_0' \in \mathbb{S}^{n-1}$, u 在沿 x_0' 同一向径在 x_0' 处连续.

第二步, 假定 $x_0' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且 $|x| < 1$ 为 $B_0(1)$ 中任意点, 记 $x = rx'$, $(0 \leqslant r < 1)$. 一方面, 由 f 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一致连续知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得对任意的 $s', t' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 当 $|s' - t'| < \delta_1$ 时, 有

$$|f(s') - f(t')| < \varepsilon/2.$$

这样当 $|x' - x_0'| < \delta_1$ 时, 由第一步的结论存在 $\delta_2 > 0$, 使得当 $1 - r < \delta_2$ 时

$$|u(x) - u(x')| < \varepsilon/2.$$

现取 $0<\delta<\dfrac{1}{2}\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 那么当 $|x-x_0'|<\delta$ 时有,

$$1-r=|x_0'|-|x|\leqslant|x_0'-x|<\delta<\delta_2$$

及

$$|x_0'-x'|\leqslant|x_0'-x|+|x-x'|=|x_0'-x|+(1-r)<2\delta<\delta_1.$$

因此

$$\begin{aligned}|u(x)-u(x_0')|&\leqslant|u(x)-u(x')|+|u(x')-u(x_0')|\\&=|u(x)-u(x')|+|f(x')-f(x_0')|<\varepsilon.\end{aligned}$$

从而 u 在 $|x|\leqslant 1$ 上连续. □

应用命题 4.1.1, 可以得到 $\mathbb{R}^n$ 中任意球内的 Dirichlet 问题的解.

推论 4.1.14 设 $x_0\in\mathbb{R}^n$, $a>0$. f 在 $\Sigma_{x_0}(a)$ 上连续, 那么函数

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega_{n-1}a^{2-n}}\displaystyle\int_{\mathbb{S}^{n-1}}f(x_0+at')\frac{a^2-|x-x_0|^2}{|(x-x_0)-at'|^n}dt', & |x-x_0|<a,\\ f(x), & |x-x_0|=a\end{cases}$$

在 $B(x_0,a)$ 内调和, 在 $\overline{B(x_0,a)}$ 上连续.

下面给出推论 4.1.8 和推论 4.1.14 的应用.

定理 4.1.15 设 $\{u_k\}$ 为区域 Ω 内调和函数列. 如 $\{u_k\}$ 在 Ω 的有界子域 Γ 的闭包 $\overline{\Gamma}$ 上一致有界, 且 $\overline{\Gamma}\subset\Omega$. 则存在子列 $\{u_{k_j}\}$ 一致收敛于一个 Γ 内的调和函数 u.

证明 我们分三步完成其证明.

(i) 首先说明 $\{u_k\}$ 在 Γ 的任一闭子集 K 上是等度连续的. 事实上, 由 $\{u_k\}$ 在 $\overline{\Gamma}$ 上一致有界知, $M=\sup\limits_k\sup\limits_{x\in\overline{\Gamma}}|u_k(x)|<\infty$. 任取闭集 $K\subset\Gamma$, 那么由 Borel 有限复盖定理知, 存在 $a_K>0$ 使得对任意的 $x_0\in K$, $B(x_0,a_K)\subset\Gamma$. 又由 $\{u_k\}$ 在子区域 Γ 内调和, 对 $\forall x\in B(x_0,a_K)$

$$u_k(x)=\frac{1}{\omega_{n-1}a_K^{2-n}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u_k(x_0+a_Kt')\frac{a_K^2-|x-x_0|^2}{|(x-x_0)-a_Kt'|^n}dt'. \tag{4.1.18}$$

事实上, 由 $u_k(x_0+a_K(\cdot))$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上连续, 并应用推论 4.1.14 以及球上 Dirichlet 问题解的唯一性即知 (4.1.18) 式成立. 由 (4.1.18) 式有

$$\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x_0)\right|=\left|\frac{n}{\omega_{n-1}a_K}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u_k(x_0+a_Kt')t_j'\,dt'\right|\leqslant\frac{n}{a_K}\cdot M. \tag{4.1.19}$$

(4.1.19) 式说明, $\left\{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}(x)\right\}$ 关于 j,k,x 在 K 上是一致有界的. 运用 (4.1.19) 式知对任意的 k 以及 $x,y\in K$,

$$|u_k(x)-u_k(y)|=|\nabla u_k(\xi)(x-y)|\leqslant\frac{n^{3/2}M}{a_K}|x-y|. \tag{4.1.20}$$

(4.1.20) 告诉我们, $\{u_k\}$ 在 K 上是等度连续的.

(ii) 其次说明存在子列 $\{u_{k_j}\}$ 在 Γ 的任一闭子集 K 上一致收敛于函数 u. 由于 $\{u_k\}$ 在 K 上等度连续且一致有界, 应用 Arzela-Ascoli 定理知, $\{u_k\}$ 在 K 上按 $C(K)$ 范数是列紧的. 因此存在子列 $\{u_{k_j}\}$ 依 $C(K)$ 范数收敛到一个函数 u. 注意到 K 为闭集, 故子列 $\{u_{k_j}\}$ 一致收敛于 u.

(iii) 最后完成定理的证明. 因 Γ 开, 故可构造一列闭子集 K_i, 满足

$$K_1\subset K_2\subset\cdots\subset\Gamma,\qquad 且\quad \bigcup_i K_i=\Gamma. \tag{4.1.21}$$

对于 K_1, 由 (ii) 知, 存在 $\{u_k\}$ 的子列 $\{u_k^{(1)}\}$ 在 K_1 上一致收敛于 v_1. 由于 $\{u_k^{(1)}\}$ 仍满足在 Ω 内调和, 在 $\overline{\Gamma}$ 上一致有界, 因此由 (i),(ii) 的结论知, 存在 $\{u_k^{(1)}\}$ 的子列 $\{u_k^{(2)}\}$ 在 K_2 上一致收敛于函数 v_2, 且 v_2 在 K_1 上的限制为 v_1. 重复上述过程, 我们得到 $\{u_k\}$ 的子列套

$$\{u_k\}\supset\{u_k^{(1)}\}\supset\cdots\supset\{u_k^{(i)}\}\supset\cdots,$$

使得对 $i=1,2,\cdots$, $\{u_k^{(i)}\}$ 在 K_i 上一致收敛于 v_i, 且 v_i 在 $K_j(1\leqslant j\leqslant i-1)$ 上的限制为 v_j. 现对 $i=1,2,\cdots$, 记 $b_i(x)=u_k^{ii}(x)$, 这里 $u_k^{ii}(x)$ 是 $\{u_k^{(i)}\}$ 的第 i 个函数. 那么对任意的 j, 最多除去前面的 $j-1$ 项之外, $\{b_i\}$ 是 $\{u_k^j\}$ 的子列, 因而在 K_j 上一致收敛于 $v_j(j=1,2,\cdots)$. 这样, 得到 Γ 内定义的函数 $u(x)$, 其在 K_j 上的限制为 $v_j(x)$. 由 (4.1.21) 可知, $\{b_i\}$ 在 Γ 的任一闭子集上均一致收敛于 u. 由推论 4.1.8 知, u 在 Γ 内调和. □

定理 4.1.16 (调和函数的反射原理) 设区域 $\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$, 关于 $\mathbb{R}^n$ 对称. 即: 如 $(x,y)=(x_1,x_2,\cdots,x_n,y)\in\Omega$, 则 $(x,-y)\in\Omega$. 如 Ω 内的连续函数 u 满足 $u(x,y)=-u(x,-y)$, 且在 $\Omega_+=:\{(x,y)\in\Omega:y>0\}$ 内调和, 则 u 在 Ω 内调和.

证明 因为 u 在 Ω_+ 内调和, 因此对 $\forall(x,y)\in\Omega_+$, $(\Delta u)(x,y)=0$. 而

$$-(\Delta u)(x,-y)=(\Delta u)(x,y)=0,$$

所以 u 在 $\Omega_-=:\{(x,y)\in\Omega:y<0\}$ 内也调和. 因此只需证明 u 在 $\Omega_0=:\{(x,y)\in\Omega:y=0\}$ 内调和即可.

任取 $(x_0,0)\in\Omega_0$, 那么存在 $\alpha>0$ 使得 $\overline{B((x_0,0),\alpha)}\subset\Omega$. 因 u 在 Ω 内连续, 自然在 $\partial B((x_0,0),\alpha)=\Sigma_{(x_0,0)}(\alpha)$ 上也连续. 由推论 4.1.14, 存在 $B((x_0,0),\alpha)$ 内的调和函数 $w(x,y)$, 使得对 $\forall(x,y)\in B((x_0,0),\alpha)$ 有,

$$w(x,y)=\frac{1}{\omega_n\alpha^{1-n}}\int_{S^n}u(x_0+\alpha t',\alpha s')\frac{\alpha^2-|(x-x_0,y)|^2}{|(x-x_0-\alpha t',y-\alpha s')|^{n+1}}dt'\,ds',$$

这里 S^n 记 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位球面, $(t',s')=(t'_1,\cdots,t'_n,s')\in S^n$. 此外, 在 $\Sigma_{(x_0,0)}(\alpha)$ 上 $w(x,y)=u(x,y)$. 由于 $u(x_0+\alpha t',\alpha s')=-u(x_0+\alpha t',-\alpha s')$ 以及

$$|(x-x_0-\alpha t',-\alpha s')|^{n+1}=|(x-x_0-\alpha t',\alpha s')|^{n+1},\quad\forall\,(t',s')\in S^n.\tag{4.1.22}$$

这样当 $y=0$ 时, 由 (4.1.22)

$$\begin{aligned}w(x,0)&=\frac{1}{\omega_n\alpha^{1-n}}\int_{S^n}u(x_0+\alpha t',\alpha s')\frac{\alpha^2-|(x-x_0,0)|^2}{|(x-x_0-\alpha t',-\alpha s')|^{n+1}}dt'\,ds'\\&=\frac{1}{\omega_n\alpha^{1-n}}\int_{S^n}-u(x_0+\alpha t',-\alpha s')\frac{\alpha^2-|(x-x_0,0)|^2}{|(x-x_0-\alpha t',\alpha s')|^{n+1}}dt'\,ds'\\&=\frac{1}{\omega_n\alpha^{1-n}}\int_{S^n}-u(x_0+\alpha t',\alpha s')\frac{\alpha^2-|(x-x_0,0)|^2}{|(x-x_0-\alpha t',-\alpha s')|^{n+1}}dt'\,ds'\\&=-w(x,0).\end{aligned}$$

由此知 $w(x,0)=0$. 另一方面, 由条件知, 对任意的 $(x_0,0)\in\Omega_0$, $u(x_0,0)=0$. 这样在 $B((x_0,0),\alpha)$ 的上半球面 Σ_+ 以及 $B((x_0,0),\alpha)\cap\mathbb{R}^n$ 上 $w(x,y)=u(x,y)$. 由于 w 和 u 均在此半球体的内部调和, 应用习题四第 2 题 (ii) 知, 在此半球体内 $w(x,y)=u(x,y)$. 同理可证在 $B((x_0,0),\alpha)$ 的下半球体内仍有 $w(x,y)=u(x,y)$. 故 u 在 $B((x_0,0),\alpha)$ 内调和. 由 $(x_0,0)\in\Omega_0$ 的任意性知 u 在 Ω_0 内调和. □

推论 4.1.17 设 u 在

$$\overline{\mathbb{R}^{n+1}_+}=:\mathbb{R}^{n+1}_+\cup\big(\mathbb{R}^n\times\{0\}\big)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}:y\geqslant 0\}$$

上连续, 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 内调和, 且在 $\mathbb{R}^n$ 上为零. 那么如果 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 内有界, 则 u 恒为零.

证明 通过反射将 u 延拓至 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上, 记其为 u_0. 那么由调和函数的反射原理 (定理 4.1.16) 知, u_0 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上调和. 由于 u_0 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 内有界, 由定理 4.1.4 知 u_0 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上为常值函数, 从而 u_0 在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上恒为零. 故 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上亦恒为零. □

[注 4.1.3] 推论 4.1.17 中 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 内有界的限制不可缺少. 例如, $u(x,y)=y$ 满足推论 4.1.17 的其他条件, 但 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上不恒为零. 此例还说明, 当 Ω 为无

界区域 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 时, Dirichlet 问题的解是不唯一的. ($u(x,y)=y$ 和 $v(x,y)\equiv 0$ 均在区域 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和, 且在边界 $\mathbb{R}^n$ 上均有边值 $f=0$.) 但若添加 u 的有界性条件, 则由推论 4.1.17, Dirichlet 问题的解是唯一的.

§4.2 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和函数的边界值

§4.2.1 边值为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的调和函数特征

定理 4.2.1

(a) 设 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p\leqslant\infty)$. 则 f 的 Poisson 积分 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和;

(b) 设 $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$. 则 μ 的 Poisson-Stieltjies 积分 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和.

证明 (a) u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内连续性可从 Poisson 核 P_y 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内的连续性得到. 由定理 4.1.7, 只需验证 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内满足球面均值条件即可. 任取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, 那么由 P_y 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内的调和性

$$\begin{aligned}
&{\omega_n}^{-1}\int_{S^n}u(x_0+rt',y_0+rs')d\sigma \qquad (d\sigma=dt'ds')\\
&\quad={\omega_n}^{-1}\int_{S^n}\int_{\mathbb{R}^n}f(z)P_{y_0+rs'}(x_0+rt'-z)dzd\sigma\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n}f(z){\omega_n}^{-1}\int_{S^n}P_{y_0+rs'}(x_0+rt'-z)d\sigma dz\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n}f(z)P_{y_0}(x_0-z)dz=u(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

从而 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和.

(b) 只需验证 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内满足球面均值条件即可. 任取 $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, 那么由 Poisson 核 P_y 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内的调和性

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_n}\int_{S^n}u(x_0+rt',y_0+rs')d\sigma \qquad (d\sigma=dt'ds')\\
&\quad=\frac{1}{\omega_n}\int_{S^n}\int_{\mathbb{R}^n}P_{y_0+rs'}(x_0+rt'-z)d\mu(z)\,d\sigma\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{S^n}P_{y_0+rs'}(x_0+rt'-z)d\sigma\right)d\mu(z)\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^n}P_{y_0}(x_0-z)d\mu(z)=u(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

从而 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和. □

定理 4.2.2 设 $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 那么函数

$$u(x,y) = \begin{cases} (f * P_y)(x), & (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ f(x), & y = 0 \end{cases}$$

在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和, 在 $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 上连续.

证明 由定理 4.2.1(a) 知 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和. 显然 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内连续. 因此仅需证明 u 在 $\mathbb{R}^n$ 上连续. 任取 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 由于 f 在 x_0 点连续, 故对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta_1 > 0$, 当 $|t| < \eta_1$ 时, $|f(x_0 - t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$. 令 $F = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leqslant \eta_1/2\}$, 那么 F 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集. 由推论 1.3.5(a) 知, 对上述 ε, 存在 $\eta_2 > 0$, 使得当 $0 < y < \eta_2$ 时, 对任意的 $x \in F$

$$|u(x,y) - f(x)| < \varepsilon/2. \tag{4.2.1}$$

这样, 对上述 ε, 取 $0 < \delta < \min\{\eta_1/2, \eta_2\}$, 那么对 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, 如 $|(x,y) - (x_0, 0)| < \delta$, 那么 $|x - x_0| < \delta < \eta_1/2$ 且 $y < \delta < \eta_2$. 这样由 (4.2.1) 有

$$|u(x,y) - u(x_0,0)| \leqslant |u(x,y) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

即 u 在 $(x_0, 0)$ 点连续. □

[注 4.2.1] 对于 $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 定理 4.2.2 给出了 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上 Dirichlet 问题的一个解 u. 现令

$$u_0(x,y) = \begin{cases} u(x,y) + y, & (x,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}, \\ f(x), & y = 0. \end{cases}$$

那么容易验证, u_0 亦在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和, 在 $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 上连续. 此事实表明, 上半空间 Dirichlet 问题的解不是唯一的.

由定理 4.2.1 知, 如 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, 那么 f 的 Poisson 积分在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和. 下面我们将讨论反向的问题, 即对于 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内的调和函数 u, 在什么条件下, u 是一个 L^p 函数的 Poisson 积分.

定理 4.2.3 如 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和, 且存在 $p\ (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 以及 $C > 0$ 使得

$$\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_p \leqslant C < \infty. \tag{4.2.2}$$

那么

(a) 当 $1 < p \leqslant \infty$ 时, 存在 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 使 u 是 f 的 Poisson 积分;

(b) 当 $p = 1$ 时, 存在 $\mu \in \mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 使 u 是 μ 的 Poisson-Stieltjies 积分;

(c) 对 $p = 1$, 如当 $y \to 0$ 时, $u(\cdot, y)$ 按 L^1 范数满足 Cauchy 条件, 即:

$$\lim_{y_1, y_2 \to 0} \|u(\cdot, y_1) - u(\cdot, y_2)\|_1 = 0.$$

那么存在 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 使 u 是 f 的 Poisson 积分.

定理 4.2.3 的证明有赖于下面两个引理.

引理 4.2.4 如 u 满足定理 4.2.3 的条件, 则存在 $A = A_{n,p} > 0$ 使得

$$\|u(\cdot, y)\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x, y)| \leqslant A \cdot Cy^{-n/p}.$$

特别地, u 在每个本征子空间 $\mathbb{R}_{+,y_0}^{n+1} =: \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} : y \geqslant y_0 > 0\}$ 上有界.

证明 只需证明 $1 \leqslant p < \infty$ 的情形. 任取 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, 以 (x, y) 为中心, $y/2$ 为半径作球, 则该球体积为 $v_{n+1}\left(\frac{y}{2}\right)^{n+1}$. 由调和函数满足球体均值条件 (见 (4.1.5)), 因此当 $1 \leqslant p < \infty$ 时

$$\begin{aligned}
|u(x, y)| &\leqslant \frac{1}{v_{n+1}\left(\frac{y}{2}\right)^{n+1}} \int_{|(\xi,\eta)-(x,y)|<y/2} |u(\xi, \eta)| d\xi\, d\eta \\
&\leqslant \frac{1}{v_{n+1}\left(\frac{y}{2}\right)^{n+1}} \left(\int_{|(\xi,\eta)-(x,y)|<y/2} |u(\xi, \eta)|^p d\xi\, d\eta \right)^{1/p} \\
&\quad \times \left(v_{n+1} \left(\frac{y}{2}\right)^{n+1} \right)^{1/p'} \\
&\leqslant \frac{A_{n,p}}{y^{(n+1)/p}} \left(\int_{y/2}^{3y/2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\xi, \eta)|^p d\xi\, d\eta \right)^{1/p} \\
&\leqslant C A_{n,p} y^{-(n+1)/p} y^{1/p} = C A_{n,p} y^{-n/p}.
\end{aligned}$$

特别地, 在 $\mathbb{R}_{+,y_0}^{n+1}$, 有 $|u(x, y)| \leqslant C A_{n,p} y_0^{-n/p}$. □

引理 4.2.5 如 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和, 并在每个本征子空间 $\mathbb{R}_{+,y_0}^{n+1}$ 上有界. 那么对任意的 $y_1, y_2 > 0$,

$$u(x, y_1 + y_2) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t, y_1) P_{y_2}(x - t) dt. \tag{4.2.3}$$

证明 任意取定 $y_0 > 0$ 以及 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, 令 $w(x, y) = u(x, y + y_0)$. 那么由 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和以及在每个本征子空间上有界知:

(i) w 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和;

(ii) w 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内有界;

(iii) w 在 $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 上连续.

另一方面, 由于 $u(\cdot,y_0)\in C(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, 令

$$w_1(x,y)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y_0)P_y(x-t)dt, & (x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+1},\\ u(x,y_0), & y=0.\end{cases}$$

那么由推论 1.3.4(a) 知, w_1 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内有界. 且由定理 4.2.2, w_1 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和, 在 $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 上连续. 现令 $h(x,y)=w(x,y)-w_1(x,y)$. 那么 h 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和并有界, 在 $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ 上连续, 且在 $\mathbb{R}^n$ 上 $h(x,0)=w(x,0)-w_1(x,0)$ 恒为零. 那么由推论 4.1.17, h 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上恒为零. 即对任意的 $y>0$,

$$u(x,y+y_0)=w(x,y)=w_1(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y_0)P_y(x-t)dt. \qquad \square$$

定理 4.2.3 的证明 (a) 当 $1<p\leqslant\infty$ 时, 由条件 (4.2.2), u 的 L^p 范数关于 y 一致有界. 因为 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ $(1\leqslant p'<\infty)$ 是可分的 Banach 空间, 任取点列 $\{y_k\}$ 满足 $y_k\to0$ $(k\to\infty)$, 那么 $\{u(x,y_k)\}$ 作为 $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函是弱 * 列紧的. 因此存在 $\{u(x,y_k)\}$ 的子列 $\{u(x,y_{k_j})\}$ 以及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\{u(x,y_{k_j})\}$ 弱 * 收敛于 f. 即: 对一切 $g\in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y_{k_j})g(t)dt=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)g(t)dt.$$

现取 $g(t)=P_y(x-t)$, 那么

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y_{k_j})P_y(x-t)dt=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)P_y(x-t)dt. \tag{4.2.4}$$

另一方面, 由引理 4.2.4 知 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和及在每个本征子空间上有界, 应用引理 4.2.5 得

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y_{k_j})P_y(x-t)dt=\lim_{j\to\infty}u(t,y_{k_j}+y)=u(t,y). \tag{4.2.5}$$

由 (4.2.4) 和 (4.2.5) 式得

$$u(t,y)=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)P_y(x-t)dt.$$

(b) 当 $p=1$ 时, 任取点列 $\{y_k\}$ 满足 $y_k\to0$ $(k\to\infty)$, 由 (4.2.2) 知, $\{u(x,y_k)\}$ 作为 $C_0(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函是一致有界的. 应用 Banch-Alaoglu 定

理，存在子列 $\{u(x,y_{k_j})\}$ 以及 $\mu\in\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 使得 $\{u(x,y_{k_j})\}$ 弱 * 收敛于 μ. 取 $P_y(x-\cdot)\in C_0(\mathbb{R}^n)$, 那么

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y_{k_j})P_y(x-t)dt=\int_{\mathbb{R}^n}P_y(x-t)d\mu(t). \tag{4.2.6}$$

由 (4.2.5) 和 (4.2.6) 得,

$$u(t,y)=\int_{\mathbb{R}^n}P_y(x-t)d\mu(t).$$

(c) 如当 $y\to 0$ 时, $u(\cdot,y)$ 按 L^1 范数满足 Cauchy 条件, 那么存在 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 使得

$$\lim_{y'\to 0}\|u(\cdot,y')-f\|_1=0.$$

因此对任意的 $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y')g(t)dt\to\int_{\mathbb{R}^n}f(t)g(t)dt\quad(y'\to 0). \tag{4.2.7}$$

现取 $g(t)=P_y(x-t)$, 那么由 (4.2.7),

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y')P_y(x-t)dt\to\int_{\mathbb{R}^n}f(t)P_y(x-t)dt\quad(y'\to 0). \tag{4.2.8}$$

另一方面, 由 (4.2.3) 和 (4.2.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(t,y')P_y(x-t)dt=u(t,y'+y)\to u(t,y)\quad(y'\to 0).$$

最后, 由上式和 (4.2.8) 得,

$$u(t,y)=\int_{\mathbb{R}^n}f(t)P(x-t,y)dt.$$ □

[注 4.2.2] 由定理 4.2.3, 当 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 时, 条件 (4.2.2) 给出了 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和函数是一个 Poisson 积分的特征, 进而可推出其非切向边值的存在性（见下面 Fatou 定理）. 定理 4.2.3 的结果在下面的意义下是最佳的：对于满足 $0<p<1$ 的每一个 p, 存在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和函数 u 满足条件 (4.2.2), 但当 $y\to 0$ 时, u 在 $\mathbb{R}^n$ 上不能几乎处处存在非切向极限.

然而可以证明, 当 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和且对 $0<p<1$ 满足 (4.2.2) 式, 则极限 $\lim\limits_{y\to 0}u(x,y)$ 在缓增广义函数的意义下存在. 即存在 $v\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 使得对任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}u(x,y)\varphi(x)dx=v(\varphi).$$

特别地, 极限 v 唯一地决定了 u（见 [3]）.

§4.2.2 调和函数的非切向极限

由第一章的讨论知道，一个 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 函数 f 的 Poisson 积分在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处存在径向和非切向极限（见推论 1.3.4 和定理 1.3.8）. 在本节我们将讨论 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 内一般调和函数（不必是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中函数的 Poisson 积分）在 $\mathbb{R}^n$ 上的非切向收敛问题.

定理 4.2.6 (Fatou 定理) 设 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上调和. 如存在 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 使得 (4.2.2) 成立，那么 u 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处存在非切向极限. 即存在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 f，对任意的 $\alpha > 0$ 及几乎所有的 $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\substack{(t,y)\in\Gamma_\alpha(x)\\(t,y)\to(x,0)}} u(t,y) = f(x). \tag{4.2.9}$$

其中：

(a) 当 $1 < p \leqslant \infty$ 时，u 为 f 的 Poisson 积分；

(b) 当 $p = 1$ 时，$f(x)dx$ 为 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中测度 μ 的绝对连续部分，且 u 为 μ 的 Poisson-Stieltjies 积分.

证明 因 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上调和且满足 (4.2.2)，当 $1 < p \leqslant \infty$ 时，由定理 4.2.3 知 u 是某 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Poisson 积分. 再由定理 1.3.8(b) 知 (4.2.9) 成立.

当 $p = 1$ 时，由定理 4.2.3，u 为 $\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$ 中测度 μ 的 Poisson-Stieltjies 积分. 由 Lebesgue 分解定理（见 [42]），存在 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 使得 $d\mu(x) = f(x)dx + d\mu_s(x)$，其中 μ_s 与 Lebesgue 测度相互奇异. 因此

$$u(x,y) = P_y * \mu(x) = P_y * f(x) + P_y * \mu_s(x).$$

一方面由定理 1.3.8(b)，$P_y * f$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的非切向极限几乎处处为 f. 另一方面，$P_y * \mu_s$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上非切向极限几乎处处为零（见 [15]），因此结论 (b) 成立. □

由于非切向收敛性是局部性质，而条件 (4.2.2) 是整体性质，因此一个自然的问题是：如果 u 在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 的局部满足较 (4.2.2) 更弱的条件，那么 u 在 $\mathbb{R}^n$ 的局部是否仍具有非切向收敛性？下面我们将讨论这个问题. 为此，先给出非切向有界的定义.

定义 4.2.1 设 $h > 0$，对 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 及 $\alpha > 0$，称

$$\Gamma^h_\alpha(x_0) = \Gamma_\alpha(x_0) \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : 0 < y \leqslant h\}$$

为高为 h 的截锥，这里 $\Gamma_\alpha(x_0)$ 为以 $(x_0,0)$ 为顶点，α 为锥度的锥（见定义 1.3.5）. 设 F 为定义在 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的可测函数，对于 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，如存在 $h > 0, \alpha > 0$ 及 $C > 0$，

使得

$$\sup_{(x,y)\in\Gamma_\alpha^h(x_0)}|F(x,y)|\leqslant C<\infty,$$

则说 F 在 x_0 处非切向有界.

[注 4.2.3] 易知，如 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上有界，那么其在 $\mathbb{R}^n$ 上必然非切向有界，但反之不然.

定理 4.2.7 (局部 Fatou 定理) 设 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的调和，并在 $\mathbb{R}^n$ 的正测度集 E 上处处非切向有界. 那么 u 在 E 上几乎处处存在非切向极限.

我们将通过下面两个命题来完成定理的证明.

命题 4.2.8 设 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上连续，在 $\mathbb{R}^n$ 的具有正测度的有界集 E 上处处非切向有界. 则对任意的 $\varepsilon,\alpha,h>0$，存在紧集 $E_1\subset E$ 及 $M=M(\varepsilon,\alpha,h)>0$，使得

(a) $|E\backslash E_1|<\varepsilon$;

(b) 对任意的 $(x,y)\in\bigcup_{a\in E_1}\Gamma_\alpha^h(a)$, $\quad|u(x,y)|\leqslant M$.

命题 4.2.9 设 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和，$E\subset\mathbb{R}^n$ 为紧集. 如对任意的 $\alpha>0$ 及 $h>0$,

$$(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E}\Gamma_\alpha^h(x_0)\text{ 时,}\quad|u(x,y)|\leqslant 1.$$

那么对 a.e. $x\in E$, u 存在非切向极限.

定理 4.2.7 的证明 不妨假定 E 为有界集合. 由于 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和，故 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上连续. 由命题 4.2.8，对任意的 $k\in\mathbb{N}$，存在紧集 $E_k\subset E$，使得 $|E\backslash E_k|<\dfrac{1}{k}$ 且对任意的 $\alpha>0,h>0$，存在 $M_k=M(k,\alpha,h)>0$ (不妨可取 $M_k\geqslant 1$)，使得

$$|u(x,y)|\leqslant M_k,\qquad\forall(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E_k}\Gamma_\alpha^h(x_0).\tag{4.2.10}$$

由 u 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和，知 $\dfrac{u}{M_k}$ 也在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和，且对紧集 $E_k\subset E$，由 (4.2.10)

$$\left|\frac{u(x,y)}{M_k}\right|\leqslant 1,\qquad(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E_k}\Gamma_\alpha^h(x_0).$$

由命题 4.2.9，$\dfrac{1}{M_k}u(x,y)$ 在 E_k 上 a.e. 存在非切向极限. 因此 u 在 E_k 上 a.e. 存在非切向极限. 令 $E_0=\bigcup_{k=1}^\infty E_k$，则 $E_0\subset E$，且

$$|E\backslash E_0|\leqslant|E\backslash E_k|<\frac{1}{k}\to 0,\quad(k\to\infty).$$

这样 $|E_0| = |E|$, 即 u 在 E 上 a.e. 存在非切向极限. □

这样, 余下只需给出命题 4.2.8 和命题 4.2.9 的证明. 在证明命题 4.2.8 之前, 先给出可测集密点的定义及其基本性质. 设 $E \subset \mathbb{R}^n$ 可测. 如点 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足:

$$\lim_{r\to 0}\frac{|B(x,r)\cap E|}{|B(x,r)|} = 1, \tag{4.2.11}$$

则称 x 为可测集 E 的密点. 有关密点的一个重要结论是: 可测集中几乎所有的点都是自身的密点. 事实上, 设 E 为 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集, χ_E 为 E 的特征函数, 显然 $\chi_E \in L_{\rm loc}\,(\mathbb{R}^n)$. 应用 Lebesgue 微分定理 (定理 1.2.9),

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\frac{|B(x,r)\cap E|}{|B(x,r)|} &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{v_n r^n}\int_{|t-x|<r}\chi_E(t)dt\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1}{v_n r^n}\int_{|t|<r}\chi_E(x-t)dt\\ &= \chi_E(x) = 1, \quad \text{a.e.} \quad x\in E.\end{aligned}$$

命题 4.2.8 的证明 该证明将分三步完成.

第一步证明: 则对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $0 < \alpha_0, h_0 < 1$, $M_0 > 0$ 及可测子集 $E_0 \subset E$, 使得

(i) $|E \setminus E_0| < \varepsilon/2$;

(ii) 对任意的 $(x,y) \in \bigcup_{x_0\in E_0}\Gamma_{\alpha_0}^{h_0}(x_0)$, $\quad |u(x,y)| \leqslant M_0$.

对 $m \in \mathbb{N}$, 记

$$E_m = \{x_0 \in E : |u(x,y)| \leqslant m, \quad \text{当 } (x,y) \in \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0)\}.$$

先说明 E_m 为可测集. 事实上 E_m 为闭集. 设 x_0 为 E_m 的任一极限点, 则存在 $\{x_k\} \subset E_m$, 使得 $x_k \to x_0$ $(k \to \infty)$. 任取 $(x',y') \in \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0)$, 那么 $|x'-x_0| < \frac{1}{m}y'$. 因此存在 $\delta > 0$ 使得 $|x'-x_0| < \delta < \frac{1}{m}y'$. 另一方面, 存在 N, 当 $k \geqslant N$ 时, $|x_k - x_0| < (\frac{1}{m}y' - \delta)/2$. 所以

$$|x'-x_N| \leqslant |x'-x_0| + |x_0-x_N| < \delta + \big(\frac{1}{m}y' - \delta\big)/2 < \frac{1}{m}y'.$$

因此说明 $(x',y') \in \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_N)$. 又注意到 $x_N \in E_m$, 因此 $|u(x',y')| \leqslant m$. 由 $(x',y') \in \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0)$ 的任意性知, $x_0 \in E_m$. 即 E_m 为闭集. 下说明

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m. \tag{4.2.12}$$

只需说明 $E \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m$. 任取 $x_0 \in E$, 由于 u 在 x_0 处非切向有界, 故存在 $\alpha_0 > 0, h_0 > 0$ 及 $M_0 > 0$, 使得当 $(x,y) \in \Gamma_{\alpha_0}^{h_0}(x_0)$ 时, $|u(x,y)| \leqslant M_0$. 这样, 取 $\frac{1}{m} \leqslant \min\{\alpha_0, h_0, \frac{1}{M_0}\}$, 那么 $\Gamma_{\alpha_0}^{h_0}(x_0) \supset \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0)$, 且

$$|u(x,y)| \leqslant M_0 \leqslant m, \quad 对\ \forall\ (x,y) \in \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0) \subset \Gamma_{\alpha_0}^{h_0}(x_0).$$

因此 $x_0 \in E_m$. 故 (4.2.12) 成立. 现记 $E_m^* = \bigcup_{k=1}^{m} E_k$. 由 (4.2.12) 知 $E = \lim\limits_{m\to\infty} E_m^*$, 且仍满足:

$$|u(x,y)| \leqslant m, \quad 对\ \forall\ (x,y) \in \bigcup_{x_0 \in E_m^*} \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0). \tag{4.2.13}$$

事实上, 任取 $\forall x_0 \in E_m^*$, 则存在 $1 \leqslant k_0 \leqslant m$ 使 $x_0 \in E_{k_0}$. 这样 $\Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0) \subset \Gamma_{\frac{1}{k_0}}^{\frac{1}{k_0}}(x_0)$. 而对任意的 $(x,y) \in \Gamma_{\frac{1}{k_0}}^{\frac{1}{k_0}}(x_0)$, 有 $|u(x,y)| \leqslant k_0 \leqslant m$. 因此对任意的 $(x,y) \in \Gamma_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{m}}(x_0)$, 有 $|u(x,y)| \leqslant m$. 即 (4.2.13) 成立. 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $E_{m_0}^*$, 使 $|E \setminus E_{m_0}^*| < \varepsilon/2$. 现令 $\alpha_0 = h_0 = \frac{1}{m_0} < 1$, $M_0 = m_0 > 0$. 如取 $E_0 = E_{m_0}^*$, 那么由 (4.2.13) 知结论 (ii) 成立.

第二步证明: 对任意的 $\beta \geqslant 1$, 存在 $M = M(\varepsilon, \beta)$ 及紧集 $E_{00} \subset E$, 使得

(iii) $|E \setminus E_{00}| < \varepsilon$;

(iv) 对任意的 $(x,y) \in \bigcup_{x_0 \in E_{00}} \Gamma_\beta^\beta(x_0)$, $\quad |u(x,y)| \leqslant M$.

由第一步的证明知 E_0 可测, 且 $|E \setminus E_0| < \varepsilon/2$. 由 (4.2.11)

$$\lim_{r\to 0} f_r(x) = \lim_{r\to 0} \frac{|B(x,r) \cap E_0|}{|B(x,r)|} = 1 \quad \text{a.e. } x \in E_0.$$

运用 Egoroff 定理, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在可测集 $E_{00} \subset E_0$, 使得 $|E_0 \setminus E_{00}| < \varepsilon/2$, 且当 $r \to 0$ 时, $f_r(x)$ 在 E_{00} 上一致收敛于 1. 这样, 对任意的 $0 < \eta < 1$, 存在 $0 < r_0 < 1$, 当 $0 < r < r_0$ 时,

$$\frac{|B(x,r) \cap E_0|}{|B(x,r)|} \geqslant \eta, \qquad \forall x \in E_{00}. \tag{4.2.14}$$

因 E 有界, 因此不妨假定 E_{00} 为紧集, 则结论 (iii) 成立. 下面只需证明, 对任意的 $\beta \geqslant 1$, $u(x,y)$ 在 $\bigcup_{x_0 \in E_{00}} \Gamma_\beta^\beta(x_0)$ 上一致有界. 对 $\forall \delta > 0$, 记

$$A_\delta := \left(\bigcup_{x_0 \in E_{00}} \Gamma_\beta^\beta(x_0) \right) \bigcap \{y \geqslant \delta\}.$$

由于 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上连续且 E 有界, 故 $u(x,y)$ 在 $\overline{A}_\delta$ 上一致有界. 因此问题归结为证明 $u(x,y)$ 在 $\bigcup_{x_0\in E_{00}}\Gamma_\beta^\delta(x_0)$ 上一致有界. 现取 $\delta=r_0/2\beta$, 那么对第一步证明中确定的 α_0 $(0<\alpha_0<1\leqslant\beta)$ 及 h_0 有

$$\bigcup_{x\in E_{00}}\Gamma_\beta^\delta(x)\subset\bigcup_{x'\in E_0}\Gamma_{\alpha_0}^{h_0}(x'). \tag{4.2.15}$$

不然的话, 存在 $x_0\in E_{00}$ 及 $(x,y)\in\Gamma_\beta^\delta(x_0)$ 使得对任意的 $x'\in E_0$, $|x-x'|\geqslant\alpha_0 y$. 注意到 $\alpha_0 y<\beta y$ 及 $|x-x_0|\leqslant\beta y$, 因此 $B_x(\alpha_0 y)\subset(B_{x_0}(2\beta y)\setminus E_0)$. 这样

$$\begin{aligned}\frac{|B_{x_0}(2\beta y)\cap E_0|}{|B_{x_0}(2\beta y)|}&\leqslant\frac{|B_{x_0}(2\beta y)|-|B_x(\alpha_0 y)|}{|B_{x_0}(2\beta y)|}\\&=\frac{(2\beta y)^n-(\alpha_0 y)^n}{(2\beta y)^n}\\&=1-(\alpha_0/2\beta)^n.\end{aligned}$$

因 $2\beta y<2\beta\delta=r_0$, 如预先取 $\eta>1-(\alpha_0/2\beta)^n$, 则与 (4.2.14) 矛盾. 这样由 (4.2.15) 及第一步的结论 (ii), 存在 $M_0>0$, 使得

$$|u(x,y)|\leqslant M_0,\qquad\forall(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E_{00}}\Gamma_\beta^\delta(x_0).$$

如记 $u(x,y)$ 在 $\overline{A}_\delta$ 上的上界为 M_1, 那么取 $M=\max\{M_0,M_1\}$, 则第二步的结论成立.

第三步 现运用上面的结论完成命题 4.2.8 的证明. 由结论 (iii),(iv), 对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $k\in\mathbb{N}$ 存在 $M_{k,\varepsilon}>0$ 及紧集 $E_{k,\varepsilon}\subset E$ 使得

(v) $|E\setminus E_{k,\varepsilon}|<\varepsilon/2^k$;

(vi) 对任意的 $(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E_{k,\varepsilon}}\Gamma_k^k(x_0)$, $\quad|u(x,y)|\leqslant M_{k,\varepsilon}$.

现令 $E_1=\bigcap_{k=1}^\infty E_{k,\varepsilon}$, 则 E_1 仍为 E 的紧子集, 且满足

$$|E\setminus E_1|=\left|\bigcup_{k=1}^\infty(E\setminus E_{k,\varepsilon})\right|\leqslant\sum_{k=1}^\infty|E\setminus E_{k,\varepsilon}|<\varepsilon.$$

又对任意的 $\alpha,h>0$, 取 $k=\max\{[\alpha],[h]\}+1$, 那么存在 $M=M(\varepsilon,\alpha,h)>0$ 使得当 $(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E_{k,\varepsilon}}\Gamma_k^k(x_0)$ 时 $|u(x,y)|\leqslant M$. 注意到 $E_1\subset E_{k,\varepsilon}$ 及

$$\bigcup_{x_0\in E_1}\Gamma_\alpha^h(x_0)\subset\bigcup_{x_0\in E_{k,\varepsilon}}\Gamma_k^k(x_0),$$

因此, 存在 $M=M(\varepsilon,\alpha,h)>0$ 使得

$$|u(x,y)|\leqslant M,\quad\forall(x,y)\in\bigcup_{x_0\in E_1}\Gamma_\alpha^h(x_0).$$ □

命题 4.2.9 的证明 对任意给定的 $\alpha>0, h>0$, 记 $\mathcal{R}=\bigcup\limits_{x_0\in E}\Gamma_\alpha^h(x_0)$. 对 $m\in\mathbb{N}$, 令

$$\varphi_m(x)=\begin{cases} u(x,\frac{1}{m}), & (x,\frac{1}{m})\in\mathcal{R},\\ 0, & (x,\frac{1}{m})\notin\mathcal{R},\end{cases}$$

这样对 $\forall m$, $|\varphi_m(x)|\leqslant 1$. 由 $\{\varphi_m(x)\}$ 一致有界以及 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的可分性知, $\{\varphi_m\}$ 作为 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性泛函列是弱 * 列紧的. 故存在 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 及子列 $\{\varphi_{m_j}\}$, 使其弱 * 收敛于 φ. 显然 $|\varphi(x)|\leqslant 1$.

现对 $y>0$, 分别记 $\varphi_m(x,y)$ 和 $\varphi(x,y)$ 为 φ_m 和 φ 的 Poisson 积分. 那么对 $(x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$, $\varphi_{m_j}(x,y)\to\varphi(x,y)$ $(j\to\infty)$. 另一方面, 对 $\forall m_j$ 记 $\psi_{m_j}(x,y)$ 满足

$$u(x,y+\frac{1}{m_j})=\varphi_{m_j}(x,y)+\psi_{m_j}(x,y). \tag{4.2.16}$$

注意到 $u(x,y+\frac{1}{m_j})\to u(x,y)$ $(j\to\infty)$, 因此由 (4.2.16), 当 $j\to\infty$ 时, $\{\psi_{m_j}(x,y)\}$ 的极限存在, 记其为 $\psi(x,y)$. 它必然满足

$$u(x,y)=\varphi(x,y)+\psi(x,y). \tag{4.2.17}$$

因 $\varphi(x,y)$ 是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 函数的 Poisson 积分, 由定理 1.3.8, $\varphi(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处存在非切向极限. 因此我们只需证明 $\psi(x,y)$ 在 E 上几乎处处存在非切向极限即可. 下面将看到, $\psi(x,y)$ 在 E 上的非切向极限为 0.

为此, 我们构造函数 H, 使其在 E 上几乎处处存在非切向极限 0 且在 $\mathcal{R}$ 上控制了 ψ. 记 $\mathcal{R}$ 的边界 $\partial\mathcal{R}=\mathcal{B}=:\mathcal{B}_0\cup\mathcal{B}_+$, 其中 $\mathcal{B}_0=:\mathcal{B}\cap\{y=0\}$, $\mathcal{B}_+=:\mathcal{B}\cap\{y>0\}$. 对 $y>0$, 令 $H(x,y)=C[(\chi_{E^c}*P_y)(x)+y]$, 其中 $C>0$ 待定. 则 H 满足以下性质:

(i) H 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和;

(ii) H 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上非负;

(iii) 在 $\mathcal{B}_+$ 上, $H(x,y)\geqslant 2$;

(iv) H 在 E 上几乎处处存在非切向极限 0;

(v) $|\psi(x,y)|\leqslant H(x,y)$, $(x,y)\in\mathcal{R}$.

下面验证 H 满足上面 5 条性质. (i)(ii) 是显然成立的. 现说明 (iii). 记

$$\mathcal{B}_+=\mathcal{B}_+^1\cup\mathcal{B}_+^2,\quad 其中:\ \mathcal{B}_+^1=:\mathcal{B}_+\cap\{y=h\},\quad \mathcal{B}_+^2=:\mathcal{B}_+\cap\{0<y<h\}.$$

先考虑 $\mathcal{B}_+^1$. 取 $C>2/h$, 则

$$H(x,h)>2/h[(\chi_{E^c}*P_h)(x)+h]\geqslant 2,\quad \forall(x,y)\in\mathcal{B}_+^1.$$

现任取 $(x,y)\in\mathcal{B}_+^2$, 则 $B(x,\alpha y)\cap E=\varnothing$. 若不然, 设 $\xi\in B(x,\alpha y)\cap E$, 那么 $|x-\xi|<\alpha y$, 即有 $(x,y)\in\Gamma_\alpha(\xi)$. 但此与 $(x,y)\in\mathcal{B}_+^2$ 矛盾. 因此,

$$\begin{aligned}H(x,y)&\geqslant C\cdot c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\chi_{E^c}(t)y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}dt\\&\geqslant C\cdot c_n\int_{B(x,\alpha y)}\frac{y}{(|x-t|^2+y^2)^{(n+1)/2}}dt\\&=C\cdot c_n\int_{|t|<\alpha}\frac{1}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}dt.\end{aligned}$$

因此只要 C 取充分大, 可使对 $\forall(x,y)\in\mathcal{B}_+^2$, $H(x,y)\geqslant 2$.

运用定理 1.3.8(b) 易知 H 在 E 上几乎处处存在非切向极限 0, 即 (iv) 成立.

最后给出 (v) 的证明. 因为 u 和 φ_{m_j} 均在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和, 因此由 (4.2.16) 知, ψ_{m_j} 亦在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上调和. 只需证明

$$H(x,y)\pm\psi_{m_j}(x,y):=h_{m_j}^{\pm}(x,y)\geqslant 0,\quad\forall(x,y)\in\mathcal{R}.\tag{4.2.18}$$

先看 $h_{m_j}^+$. 若不然, 存在 $\varepsilon_0>0$ 及 $(x_0,y_0)\in\mathcal{R}$, 使得 $h_{m_j}^+(x_0,y_0)<-\varepsilon_0$. 记

$$G=\{(x,y)\in\mathcal{R}:h_{m_j}^+(x,y)<-\varepsilon_0\}.$$

由于 G 为有界无限集 (可由 $\mathcal{R}$ 有界以及 $h_{m_j}^+$ 的连续性得到), 故 G 必存在极限点 (x^*,y^*). 以下说明必有 $(x^*,y^*)\in\mathcal{B}$. 事实上, 如果 $(x^*,y^*)\notin\mathcal{B}$, 则 $\bar{G}\subset\mathcal{R}$. 由于 $h_{m_j}^+$ 在 $\bar{G}$ 上调和且在 $\bar{G}$ 上达到其最小值, 且此最小值亦为 $h_{m_j}^+$ 在 $\mathcal{R}$ 上的最小值. 但由调和函数的极值原理, $h_{m_j}^+$ 在 $\mathcal{R}$ 上调和, 故其最小值只能在 $\partial\mathcal{R}$ 上达到.

(1) 如果 $(x^*,y^*)\in\mathcal{B}_+$. 此时存在 $\{(x_k,y_k)\}\subset G\subset\mathcal{R}$ 使得 $(x_k,y_k)\to(x^*,y^*)\quad(k\to\infty)$. 由此推出, $h_{m_j}^+(x^*,y^*)\leqslant-\varepsilon_0$. 这样, 由 (4.2.18) 及 (4.2.16) 得

$$H(x^*,y^*)+\varepsilon_0\leqslant|\psi_{m_j}(x^*,y^*)|\leqslant 2.$$

但此与性质 (iii) 矛盾.

(2) 如果 $(x^*,y^*)\in\mathcal{B}_0$. 那么 $x^*\in E$ 且 $y^*=0$. 此时存在 $\{(x_k,y_k)\}\subset G\subset\mathcal{R}$ 使得 $(x_k,y_k)\to(x^*,0)\quad(k\to\infty)$. 注意到 $\varphi_{m_j}(x,y)$ 是 $\varphi_{m_j}(x)$ 的 Poisson 积分, 且 $\varphi_{m_j}(x)$ 在 x^* 处连续, 因此 $\varphi_{m_j}(x,y)$ 在 $(x^*,0)$ 存在非切向极限 $\varphi_{m_j}(x^*)$. 故

对 $\forall\ \alpha>0$, 当 $(x_k,y_k)\in\Gamma_\alpha(x^*)$ 时

$$\begin{aligned}&\lim_{(x_k,y_k)\to(x^*,0)}\psi_{m_j}(x_k,y_k)\\&=\lim_{(x_k,y_k)\to(x^*,0)}\left[u(x_k,y_k+\frac{1}{m_j})-\varphi_{m_j}(x_k,y_k)\right]\\&=u(x^*,\tfrac{1}{m_j})-\varphi_{m_j}(x^*)=0.\end{aligned}\tag{4.2.19}$$

另一方面显然有

$$\overline{\lim_{(x_k,y_k)\to(x^*,0)}}h^+_{m_j}(x_k,y_k)\leqslant-\varepsilon_0.\tag{4.2.20}$$

因此由 (4.2.19), (4.2.20) 有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{(x_k,y_k)\to(x^*,0)}}H(x_k,y_k)&\leqslant\overline{\lim_{(x_k,y_k)\to(x^*,0)}}h^+_{m_j}(x_k,y_k)-\underline{\lim_{(x_k,y_k)\to(x^*,0)}}\psi_{m_j}(x_k,y_k)\\&\leqslant-\varepsilon_0.\end{aligned}$$

但此与性质 (ii) 矛盾. 这样对 $h^+_{m_j}$, 我们证明了 (4.2.18) 式. 同理可证, 对于 $h^-_{m_j}$ (4.2.18) 式仍然成立. 因此

$$H(x,y)\geqslant|\psi_{m_j}(x,y)|,\quad\forall(x,y)\in\mathcal{R}.$$

故性质 (v) 成立. 由性质 (iv) 即知, $\psi(x,y)$ 在 E 上几乎处处存在非切向极限 0. 从而 $u(x,y)$ 在 E 上几乎处处存在非切向极限. 这样完成了命题 4.2.9 的证明.□

§4.3 球面调和函数

§4.3.1 球面调和函数的性质

由定理 2.2.9, $L^2(\mathbb{R}^2)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\oplus\mathfrak{H}_2^k$, 其中每个 $\mathfrak{H}_2^k$ 在 Fourier 变换下不变. 我们希望在维数 $n>2$ 时获得类似结果. 在 $n=2$ 时, $\{e^{ik\theta}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 起了非常本质的作用. 在 $n>2$ 时, 起相同作用的是球调和函数.

记 $\mathscr{P}_k^n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一切复系数 k 阶齐次多项式的全体. 即:

$$\mathscr{P}_k^n=\Big\{P(x):P(x)=\sum_{|\alpha|=k}a_\alpha x^\alpha,\quad\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n\Big\}.$$

则有如下结论：

(a) $\mathscr{P}_k^n$ 的维数 $\dim(\mathscr{P}_k^n) := d_k^n = \mathrm{C}_{n+k-1}^{n-1} = \mathrm{C}_{n+k-1}^{k}$.

事实上，注意到单项式 $x^\alpha, |\alpha| = k$ 的全体是 $\mathscr{P}_k^n$ 的一个基. 因此该基中元素的个数恰好为满足 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k$ 的非负整数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所有可能取法的总数. 它可如下得到：将 k 个黑球排成一排，再将 $n-1$ 个红球任意地插进去，便得到这 k 个黑球的一个分组，它对应着非负整数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的一种取法. 因此所有可能取法的总数为在 $k+n-1$ 个黑球中将其中任意 $n-1$ 个黑球染成红球的方法的总和，即是 C_{n+k-1}^{n-1}.

(b) 在 $\mathscr{P}_k^n$ 中引入内积：

$$\langle P, Q\rangle = P(D)\bar{Q}, \quad \forall P, Q \in \mathscr{P}_k^n, \tag{4.3.1}$$

其中 $P(D)$ 为由 $P(x)$ 确定的微分算子. 注意到对 $\forall P, Q \in \mathscr{P}_k^n$, $\langle P, Q\rangle$ 是一个确定的复数. 我们仅看单项式的情况. 设 $P(x) = a_\alpha x^\alpha$, $Q(x) = b_\beta x^\beta$, 那么

$$P(D)\bar{Q} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta, \\ \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!\, a_\alpha \bar{b}_\beta, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

此外，$\langle P, Q\rangle$ 满足如下性质：

(i) $\langle P, P\rangle = 0 \Longleftrightarrow P \equiv 0$;

(ii) $\langle P_1 + P_2, Q\rangle = \langle P_1, Q\rangle + \langle P_2, Q\rangle$;

(iii) $\langle P, Q\rangle = \overline{\langle Q, P\rangle}$;

(iv) $\langle P, \lambda_1 Q + \lambda_2 Q\rangle = \bar{\lambda}_1\langle P, Q\rangle + \bar{\lambda}_2\langle P, Q\rangle$.

事实上，如记 $P(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha$, 那么 $\langle P, P\rangle = \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|^2 \alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!$, 从而 (i) 成立. 而 (ii)-(iv) 则是显然的. 因此 $\mathscr{P}_k^n$ 按 (4.3.1) 定义的内积构成一个内积空间. 容易看出，$\mathscr{P}_k^n$ 还是一个 Hilbert 空间.

定理 4.3.1 ($\mathscr{P}_k^n$ 的分解定理) 记 $\mathscr{P}_k^n$ 中调和多项式的全体为 $\mathscr{A}_k^n$. 则有如下的分解定理：

$$\mathscr{P}_k^n = \mathscr{A}_k^n \oplus |x|^2\mathscr{A}_{k-2}^n \oplus \cdots \oplus |x|^{2\ell}\mathscr{A}_{k-2\ell}^n, \tag{4.3.2}$$

其中当 k 为偶数时 $\ell = k/2$, 当 k 为奇数时 $\ell = (k-1)/2$. 因此，对任意的 $P \in \mathscr{P}_k^n$, 则有

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 P_1(x) + \cdots + |x|^{2\ell} P_\ell(x), \tag{4.3.3}$$

这里 $P_j \in \mathscr{A}_{k-2j}^n$ 为 $k-2j$ 阶齐次调和多项式, $j = 0, 1, \cdots, \ell$.

证明 不妨假定 $k \geqslant 2$. 令 $\varphi(P) = \Delta P$, 这里 Δ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Laplace 算子. 则 φ 是 $\mathscr{P}_k^n$ 到 $\mathscr{P}_{k-2}^n$ 的一个映射. 由于 $\mathscr{P}_{k-2}^n$ 是 Hilbert 空间, 而 $\varphi(\mathscr{P}_k^n) \subset \mathscr{P}_{k-2}^n$ 为闭子空间, 因此

$$\mathscr{P}_{k-2}^n = \varphi(\mathscr{P}_k^n) \oplus (\varphi(\mathscr{P}_k^n))^{\perp}.$$

下面说明 $(\varphi(\mathscr{P}_k^n))^{\perp} = \{0\}$, 即 φ 是映上的. 若不然, 存在 $Q \in \mathscr{P}_{k-2}^n$, $Q \neq 0$ 使得对 $\forall P \in \mathscr{P}_k^n$

$$\overline{\langle \Delta P, Q\rangle} = \langle Q, \Delta P\rangle = 0.$$

特别地, 取 $P(x) = |x|^2 Q(x) \in \mathscr{P}_k^n$. 那么 $P(D) = \Delta Q(D)$. 由上式,

$$0 = \langle Q, \Delta P\rangle = Q(D)\overline{\Delta P} = \Delta Q(D)\overline{P} = P(D)\overline{P} = \langle P, P\rangle.$$

由性质 (i) 得 $P \equiv 0$. 但此与 $Q \neq 0$ 矛盾.

对 $2 \leqslant j \leqslant k$, 记

$$\mathscr{B}_j^n = \left\{P(x) \in \mathscr{P}_j^n : P(x) = |x|^2 Q(x),\ Q(x) \in \mathscr{P}_{j-2}^n\right\} = |x|^2 \mathscr{P}_{j-2}^n.$$

则 $\mathscr{B}_j^n$ 为 $\mathscr{P}_j^n$ 的闭子空间, 且还有

$$\mathscr{P}_j^n = \mathscr{A}_j^n \oplus \mathscr{B}_j^n. \tag{4.3.4}$$

为证 (4.3.4) 式, 先说明 $\mathscr{B}_j^{n\perp} \subset \mathscr{A}_j^n$. 事实上, 设 $P \in \mathscr{B}_j^{n\perp}$. 则对任意的 $R(x) = |x|^2 Q(x) \in \mathscr{B}_j^n$,

$$0 = \langle R, P\rangle = \Delta Q(D)\overline{P} = Q(D)\overline{\Delta P} = \langle Q, \Delta P\rangle.$$

在上式中取 $Q = \Delta P$, 那么 $\Delta P \equiv 0$. 即有 $P \in \mathscr{A}_j^n$. 反之, 任取 $P \in \mathscr{A}_j^n$ 及任意的 $R(x) = |x|^2 Q(x) \in \mathscr{B}_j^n$, 则有

$$\langle R, P\rangle = \Delta Q(D)\overline{P} = Q(D)\overline{\Delta P} = \langle Q, \Delta P\rangle = 0.$$

因此 $\mathscr{A}_j^n \subset \mathscr{B}_j^{n\perp}$. 故 (4.3.4) 成立. 重复运用 (4.3.4) 式便得 (4.3.2).

最后, 由正交分解定理, 对任意的 $P \in \mathscr{P}_k^n$, 存在唯一的 $P_0 \in \mathscr{A}_k^n$ 及 $Q \in \mathscr{P}_{k-2}^n$ 使得

$$P(x) = P_0(x) + |x|^2 Q(x).$$

对 $Q(x)$ 和 $j = k-2$ 再次应用 (4.3.4), 得到唯一分解

$$Q(x) = P_1(x) + |x|^2 Q_1(x),$$

其中 $P_1 \in \mathscr{A}_{k-2}^n$ 及 $Q_1 \in \mathscr{P}_{k-4}^n$. 重复上述过程便得到分解式 (4.3.3). □

定义 4.3.1 称 $\mathscr{A}_k^n$ 为 k 阶球体调和函数空间. $\mathscr{A}_k^n$ 在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制记为 $\mathscr{H}_k^n$, 称为 k 阶球面调和函数空间, $\mathscr{H}_k^n$ 中的函数简称为 k 阶球调和函数. 因此

$$\mathscr{H}_k^n = \left\{Y(x') : Y(x') = P(\frac{x}{|x|}),\ P(x) \in \mathscr{A}_k^n\right\}.$$

注意到对 $\forall P(x) \in \mathscr{A}_k^n$, $P(x) = |x|^k Y(\frac{x}{|x|})$. 因此 $\phi : P(x) \to Y(x')$ 是 $\mathscr{A}_k^n \to \mathscr{H}_k^n$ 的一一映上的线性映射. 从而构成 $\mathscr{A}_k^n \to \mathscr{H}_k^n$ 的同构映射. 故由 (4.3.4) 当 $k \geqslant 2$ 时

$$\begin{aligned}\dim\mathscr{H}_k^n = \dim\mathscr{A}_k^n &= \dim\mathscr{P}_k^n - \dim\mathscr{P}_{k-2}^n \\ &= d_k^n - d_{k-2}^n \\ &= \mathrm{C}_{n+k-1}^k - \mathrm{C}_{n+k-3}^{k-2}.\end{aligned}$$

当 $n = 2$ 时, $\dim\mathscr{H}_k^2 = 2$. 事实上, 取 $P(x,y) = (x+iy)^k \in \mathscr{P}_k^2$ $(k \geqslant 1)$. 由 P 为解析函数, 故 $\Delta P(x,y) = 0$. 现记 $P(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$. 那么由

$$\Delta P(x,y) = \Delta u(x,y) + i\Delta v(x,y) = 0$$

得 $\Delta u(x,y) = \Delta v(x,y) = 0$. 因此 $u, v \in \mathscr{A}_k^2$. 另一方面, 记

$$P(x,y) = (re^{i\theta})^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$$

及 $\tilde{u}, \tilde{v}$ 分别为 u, v 在 $\mathbb{S}^1$ 上的限制, 那么 $\tilde{u} = \cos k\theta$, $\tilde{v} = \sin k\theta$. 此说明

$$\mathscr{H}_k^2 = \mathrm{span}\{\cos k\theta,\ \sin k\theta\}.$$

故 $\dim\mathscr{H}_k^2 = 2$.

定理 4.3.2 任何 n 元多项式在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制是 $\bigcup_{k=0}^\infty \mathscr{H}_k^n$ 中元素的有限线性组合.

证明 注意到任何 n 元多项式均是 $\bigcup_{k=0}^\infty \mathscr{P}_k^n$ 中多项式的有限线性组合. 而由 (4.3.3), 对任意的 k 及任意的 $P \in \mathscr{P}_k^n$, 其在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制是

$$P(x') = P_0(x') + P_1(x') + \cdots + P_\ell(x'),$$

其中 $x' = \frac{x}{|x|}$ $(x \neq 0)$, 因此结论成立. □

推论 4.3.3 $\bigcup_{k=0}^\infty \mathscr{H}_k^n$ 中元素的一切有限线性组合:

(a) 在 $C(\mathbb{S}^{n-1})$ 中按 L^∞ 范数稠密；

(b) 在 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中稠密.

证明 (a) 由 Weierstrass 逼近定理, 如 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$, 则 $g(x)$ 可用限制在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的多项式一致地逼近. 而由定理 4.3.2 知, 这样多项式的限制是 $\bigcup_{k=0}^\infty \mathscr{H}_k^n$ 中元素的有限线性组合.

(b) 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 及 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $g \in C(\mathbb{S}^{n-1})$ 使得 $\|f-g\|_2 < \varepsilon/2$. 又可取 $\bigcup_{k=0}^\infty \mathscr{H}_k^n$ 中元素的有限线性组合 h, 使得 $\|h-g\|_\infty < \varepsilon/2(\omega_{n-1})^{1/2}$. □

由推论 4.3.3, $\bigcup_{k=0}^\infty \mathscr{H}_k^n \subset L^2(\mathbb{S}^{n-1})$. 现定义 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中的内积. 对任意的 $f, g \in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$,

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(x')\overline{g(x')}dx'.$$

命题 4.3.4 $\{\mathscr{H}_k^n\}$ 是两两正交的.

证明 需要证明, 当 $k \neq \ell$ 时, 对任意的 $Y^{(k)} \in \mathscr{H}_k^n$ 及 $Y^{(\ell)} \in \mathscr{H}_\ell^n$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y^{(k)}(x')\overline{Y^{(\ell)}(x')}dx' = 0. \tag{4.3.5}$$

事实上, 对 $x \neq 0$, 令 $u(x) = |x|^k Y^{(k)}(x')$, $v(x) = |x|^\ell Y^{(\ell)}(x')$. 假如 $x = 0$ 且 $k, \ell \neq 0$, 那么令 $u(0) = v(0) = 0$. 如 $x = 0$ 且 $k = 0$, 此时 $Y^{(k)}(x')$ 为常数 C, 则令 $u(0) = C$.

这样 u, v 在 x' 处的外法向方向导数分别为:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{x=x'} = \frac{d}{dr}\left(r^k Y^{(k)}(x')\right)\Big|_{r=1} = kY^{(k)}(x')$$

及

$$\left.\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\right|_{x=x'} = \frac{d}{dr}\left(r^\ell Y^{(\ell)}(x')\right)\Big|_{r=1} = \ell Y^{(\ell)}(x').$$

应用 Green 公式

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{|x|\leqslant 1} (u\Delta\bar{v} - \bar{v}\Delta u)dx \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(u\frac{\partial \bar{v}}{\partial \mathbf{n}} - \bar{v}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right) dx' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(Y^{(k)}(x')\ell\overline{Y^{(\ell)}(x')} - \overline{Y^{(\ell)}(x')}kY^{(k)}(x')\right) dx' \\
&= (\ell - k)\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y^{(k)}(x')\overline{Y^{(\ell)}(x')}dx'.
\end{aligned}$$

故 (4.3.5) 式成立. □

由命题 4.3.4, 立刻有如下结论:

定理 4.3.5 设 $\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$ ($a_k=\dim\mathscr{H}_k^n$) 为 $\mathscr{H}_k^n$ 的一组标准正交基, 那么 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$ 为 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 的一组标准正交基.

[注 4.3.1] 由定理 4.3.5, 对任意的 $f\in L^2(\mathbb{S}^{n-1})$, 存在唯一的表达式 (在 L^2 意义下)

$$f(x')=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}c_{jk}Y_j^k, \tag{4.3.6}$$

且 $\|f\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}=\sum_{k,j}c_{jk}^2$, 其中 $c_{jk}=\langle f,Y_j^{(k)}\rangle$, $k=0,1,\cdots$, $j=1,2,\cdots,a_k$.

[注 4.3.2] 在 $n=2$ 时, (4.3.6) 即为 f 的 Fourier 级数. 而 $\dim\mathscr{H}_k^2=2$ 且 $\mathscr{H}_k^2=\mathrm{span}\{\cos k\theta,\ \sin k\theta\}$. 因此 $Y_1^{(k)}(e^{i\theta})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos k\theta$, $Y_2^{(k)}(e^{i\theta})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin k\theta$ 是 $\mathscr{H}_k^2$ 的一组标准正交基.

§4.3.2 k 阶带调和函数

由经典的 Fourier 级数理论知道, 以 2π 为周期的可积函数 f 的 Fourier 级数的 Abel 平均为

$$u(r,\theta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k r^{|k|}e^{ik\theta}=\int_0^{2\pi}f(\phi)P(r,\theta-\phi)d\phi,$$

其中 $0\leqslant r<1$, c_k 为 f 的 Fourier 系数且 $P(r,\theta)$ 为单位圆上的 Poisson 核, 即

$$P(r,\theta)=\frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}r^k\cos k\theta\right\}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}. \tag{4.3.7}$$

下面将看到在 $n>2$ 时也有类似结论. 取定 $x'\in\mathbb{S}^{n-1}$, 如下定义 $\mathscr{H}_k^n$ 上的线性泛函 $L_{x'}$:

$$L_{x'}(Y)=Y(x')\qquad\forall\, Y\in\mathscr{H}_k^n.$$

注意到 $\mathscr{H}_k^n$ 为有限维线性空间, 因此 $\mathscr{H}_k^n$ 为自对偶空间. 由 Riesz 表示定理, 存在唯一的 k 阶球调和函数 $Z_{x'}^{(k)}\in\mathscr{H}_k^n$, 使得对任意的 $Y\in\mathscr{H}_k^n$ 有

$$L_{x'}(Y)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}Y(t')Z_{x'}^{(k)}(t')dt'=Y(x'). \tag{4.3.8}$$

由 (4.3.8) 式确定的 $Z_{x'}^{(k)}$ 称为以 x' 为极的 k 阶带调和函数.

引理 4.3.6 (带调和函数的基本性质)

(a) 若 $\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$ 为 $\mathscr{H}_k^n$ 的一组标准正交基, 那么

$$Z_{x'}^{(k)}(t')=\sum_{m=1}^{a_k}\overline{Y_m^{(k)}(x')}Y_m^{(k)}(t'); \tag{4.3.9}$$

(b) $Z_{x'}^{(k)}(t')$ 是实值的, 且 $Z_{x'}^{(k)}(t')=Z_{t'}^{(k)}(x')$;

(c) 若 ρ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转, 那么 $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')=Z_{x'}^{(k)}(t')$.

证明 首先, 因为 $\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$ 为 $\mathscr{H}_k^n$ 的标准正交基, 故

$$Z_{x'}^{(k)}(t')=\sum_{m=1}^{a_k}\langle Z_{x'}^{(k)},Y_m^{(k)}\rangle Y_m^{(k)}(t').$$

而由 (4.3.8)

$$\langle Z_{x'}^{(k)},Y_m^{(k)}\rangle=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\overline{Y_m^{(k)}(t')}Z_{x'}^{(k)}(t')dt'=\overline{Y_m^{(k)}(x')}.$$

其次, 由于 $\mathscr{H}_k^n$ 的维数与该空间中的函数是实值还是复值没有关系, 因此可以选取实值函数作为 $\mathscr{H}_k^n$ 的一组标准正交基. 由 (4.3.9) $Z_{x'}^{(k)}(t')$ 是实值的, 且

$$Z_{x'}^{(k)}(t')=\overline{Z_{x'}^{(k)}(t')}=\sum_{m=1}^{a_k}Y_m^{(k)}(x')\overline{Y_m^{(k)}(t')}=Z_{t'}^{(k)}(x').$$

最后, 对任意的 $Y\in\mathscr{H}_k^n$ 及 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转 ρ 有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')Y(t')dt'&=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}Z_{\rho x'}^{(k)}(w')Y(\rho^{-1}w)dw'\\&=Y(\rho^{-1}(\rho x'))=Y(x')\\&=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}Z_{x'}^{(k)}(t')Y(t')dt'.\end{aligned}$$

由线性泛函表示式的唯一性知 $Z_{\rho x'}^{(k)}(\rho t')=Z_{x'}^{(k)}(t')$. □

推论 4.3.7

(a) 对任意的 $x'\in\mathbb{S}^{n-1}$, $Z_{x'}^{(k)}(x')=a_k/\omega_{n-1}$, 这里 $a_k=\dim\mathscr{H}_k^n$;

(b) 对任意的 $x'\in\mathbb{S}^{n-1}$ 及 $\mathscr{H}_k^n$ 的任一组标准正交基 $\{Y_1^{(k)},\cdots,Y_{a_k}^{(k)}\}$,

$$\sum_{m=1}^{a_k}|Y_m^{(k)}(x')|^2=a_k/\omega_{n-1};$$

(c) 存在仅与 n 有关的常数 C, 使得对任意的 $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 及 $\mathscr{H}_k^n$ 的任一标准正交基中任一元 $Y^{(k)}$, 有 $|Y^{(k)}(x')| \leqslant Ck^{(n-2)/2}$;

(d) 对任意的 $u' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\|Z_{u'}^{(k)}\|_2^2 = a_k/\omega_{n-1}$, 且对任意的 $x', t' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $|Z_{t'}^{(k)}(x')| \leqslant Ck^{n-2}$.

证明 设 $x_1', x_2' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 则存在旋转 ρ 使得 $\rho x_1' = x_2'$. 由引理 4.3.6(c), $Z_{x_2'}^{(k)}(x_2') = Z_{x_1'}^{(k)}(x_1')$. 因此存在 c, 使得对任意的 $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $Z_{x'}^{(k)}(x') = c$. 由 (4.3.9) 知常数 $c = \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m^{(k)}(x')|^2$, 这里 $\{Y_1^{(k)}, \cdots, Y_{a_k}^{(k)}\}$ 是 $\mathscr{H}_k^n$ 的任一组标准正交基. 因此

$$a_k = \sum_{m=1}^{a_k} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |Y_m^{(k)}(x')|^2 dx' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m^{(k)}(x')|^2 dx' = c\omega_{n-1}.$$

即 $c = a_k/\omega_{n-1}$. 这样同时证明了 (a) 和 (b).

注意到当 k 充分大时有

$$a_k = \mathrm{C}_{n+k-1}^k - \mathrm{C}_{n+k-3}^{k-2} = \frac{(n+2k-2)}{k} \cdot \frac{(n+k-3)!}{(k-1)!(n-2)!} \leqslant C_n k^{n-2},$$

再由 (b) 知 $|Y^{(k)}(x')| \leqslant (a_k/\omega_{n-1})^{1/2}$, 从而 (c) 成立.

最后, 由 (4.3.9), 对任意的 $u' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 有

$$\begin{aligned}
\|Z_{u'}^{(k)}\|_2^2 &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Z_{u'}^{(k)}(t') \overline{Z_{u'}^{(k)}(t')} dt' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{m=1}^{a_k} \overline{Y_m^{(k)}(u')} Y_m^{(k)}(t') \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{a_k} \overline{Y_j^{(k)}(u')} Y_j^{(k)}(t') \right)} dt' \\
&= \sum_{m,j=1}^{a_k} \overline{Y_m^{(k)}(u')} Y_j^{(k)}(u') \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y_m^{(k)}(t') \overline{Y_j^{(k)}(t')} dt' \\
&= \sum_{m=1}^{a_k} |Y_m^{(k)}(u')|^2 = a_k/\omega_{n-1}.
\end{aligned}$$

另一方面, 由带调和函数的定义 (4.3.8), 对于任意的 $x', t' \in \mathbb{S}^{n-1}$

$$Z_{t'}^{(k)}(x') = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Z_{t'}^{(k)}(w') Z_{x'}^{(k)}(w') dw'.$$

这样,

$$|Z_{t'}^{(k)}(x')| \leqslant \|Z_{t'}^{(k)}\|_2 \cdot \|Z_{x'}^{(k)}\|_2 = a_k/\omega_{n-1} \leqslant Ck^{n-2}. \qquad \square$$

下面给出较推论 4.3.7(c) 更一般的结论.

推论 4.3.8 设 $k\in\mathbb{N}$, $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$ 且 $|\alpha|\leqslant k$. 那么存在 $C=C(n,\alpha)$ 使得对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$ 及 $\mathscr{H}_k^n$ 的任一标准正交基中任一元 $Y^{(k)}$, 有

$$|D^\alpha(|x|^kY^{(k)}(x'))|\leqslant C|x|^{k-|\alpha|}k^{(n+2|\alpha|-2)/2}.$$

证明 令 $P(x)=|x|^kY^{(k)}(x')$, 则 $P\in\mathscr{A}_k^n$. 应用 Gauss 公式得,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}P(\nabla P)\cdot\mathbf{n}dx'&=\int_{B(1)}(|\nabla P|^2+P\Delta P)dx\\&=\int_{B(1)}|\nabla P|^2dx\\&=\int_0^1 r^{2k+n-3}dr\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\nabla P|^2_{x=x'}dx'\\&=\frac{1}{2k+n-2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\nabla P|^2_{x=x'}dx'.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}P(\nabla P)\cdot\mathbf{n}dx'=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}Y^{(k)}\frac{\partial P}{\partial\mathbf{n}}\bigg|_{x=x'}dx'=k\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|Y^{(k)}|^2dx'=k,$$

这样

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\nabla P|^2_{x=x'}dx'=k(2k+n-2).\tag{4.3.10}$$

注意到 $\frac{\partial P}{\partial x_j}\in\mathscr{A}_{k-1}^n$, $j=1,2,\cdots,n$. 如记 $\|\frac{\partial P}{\partial x_j}\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}=a$, 那么由推论 4.3.7(c), 存在仅与 n 有关的常数 C 使得

$$\left|\frac{\partial P}{\partial x_j}\right|\leqslant aC(k-1)^{(n-2)/2}.\tag{4.3.11}$$

另一方面, 应用 (4.3.10) 得

$$a^2\leqslant\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial P}{\partial x_j}\right)^2\bigg|_{x=x'}dx'=k(2k+n-2).$$

此式结合 (4.3.11) 表明, 当 $|x|=1$ 时, $\left|\frac{\partial P}{\partial x_j}\right|\leqslant Ck^{n/2}$. 由于 $\frac{\partial P}{\partial x_j}$ 是 $k-1$ 阶齐次的, 因此证明了当 $|\alpha|=1$ 时结论成立. 对一般的情形, 重复上述过程便可. □

我们知道, $\mathbb{R}^2$ 中单位圆上 Poisson 核可以通过余弦函数来表达. 下面将看到, 运用带调和函数可以表达 $\mathbb{R}^n$ 中单位球上的 Poisson 核. 设 $0<|x|<1$, $|t'|=1$, θ 为 $\frac{x}{|x|}$ 与 t' 的夹角, 那么由 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆上 Poisson 核的定义 (见 (4.3.7))

$$p(t',x)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{k=1}^\infty r^k\frac{\cos k\theta}{\pi}=\frac{1}{2\pi}\frac{1-|x|^2}{|x-t'|^2},$$

其中 $r=|x|$, $\cos\theta=\frac{x\cdot t'}{|x|}$. 类似地，我们可以定义 $\mathbb{R}^n$ 中单位球上的 Poisson 核 $p(t',x)$ 为：

$$p(t',x)=\frac{1}{\omega_{n-1}}\frac{1-|x|^2}{|x-t'|^n}.$$

则有下面的结论:

定理 4.3.9 设 $r=|x|<1$, 则对一切 $t'\in\mathbb{S}^{n-1}$,

$$p(t',x)=\sum_{k=0}^{\infty}r^kZ_{x'}^{(k)}(t')=\sum_{k=0}^{\infty}r^kZ_{t'}^{(k)}(x').$$

证明 由推论 4.3.7(d), 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}r^kZ_{t'}^{(k)}(x')$ 在 $|x|<1$ 的任意闭域内一致收敛. 记其和函数为 $q(t',x)$. 现设 $u(t')=\sum_{j=1}^{m}b_jY_j(t')$ 是 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k^n$ 中球调和函数的一个有限线性组合，其中 $Y_j(t')\in\mathscr{H}_j^n$. 由引理 4.3.6(b) 以及带调和函数的定义 (4.3.8),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(t')q(t',x)dt'&=\sum_{j=1}^{m}b_j\int_{\mathbb{S}^{n-1}}q(t',x)Y_j(t')dt'\\&=\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}r^kZ_{t'}^{(k)}(x')Y_j(t')dt'\\&=\sum_{j=1}^{m}b_j\int_{\mathbb{S}^{n-1}}r^jZ_{x'}^{(j)}(t')Y_j(t')dt'\\&=\sum_{j=1}^{m}b_j|x|^jY_j(x')\\&:=U(x).\end{aligned}$$

则 $u(x')$ 是 $U(x)$ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的限制. 由单位球内 Dirichlet 问题解的唯一性

$$U(x)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(t')p(t',x)dt'=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}u(t')q(t',x)dt'.$$

这样

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}[p(t',x)-q(t',x)]u(t')dt'=0. \tag{4.3.12}$$

(4.3.12) 说明 $p(t',x)-q(t',x)$ 与 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k^n$ 中任意有限线性组合均正交. 由于 $\bigcup_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k^n$ 中元素的一切有限线性组合在 $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中稠密 (推论 4.3.3), 因此 $p(t',x)=q(t',x)$, a.e. $t'\in\mathbb{S}^{n-1}$. 再由 $p(t',x)$ 与 $q(t',x)$ 的连续性知对 $\forall\, t'\in\mathbb{S}^{n-1}$, $p(t',x)=q(t',x)=\sum_{k=0}^{\infty}r^kZ_{t'}^{(k)}(x')$. □

以下给出带调和函数的几何特征. 设 $e,\ \xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ $(\xi \neq e)$. 称过 ξ 点且与 e 垂直的超平面与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的交为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 的正交于 e 的平行截形, 记为 $\mathscr{L}_e(\xi)$, 即:

$$\mathscr{L}_e(\xi) = \{x' \in \mathbb{S}^{n-1} : \langle x' - \xi, e\rangle = 0\}.$$

下面的事实是明显的:

(a) 对任意的 $\theta_1, \theta_2 \in \mathscr{L}_e(\xi)$, 存在旋转 ρ 使得 $\rho e = e$ 且 $\rho\theta_1 = \theta_2$;

(b) 对任意的 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$ $(\xi \neq e)$, $Z_e^{(k)}$ 在 $\mathscr{L}_e(\xi)$ 上取常值. 即: 对任意的 $\theta_1, \theta_2 \in \mathscr{L}_e(\xi)$, $Z_e^{(k)}(\theta_1) = Z_e^{(k)}(\theta_2)$.

我们将说明, 性质 (a) 和 (b) 刻画了带调和函数. 先给出下面的引理:

引理 4.3.10 设 P 为 $\mathbb{R}^n$ 上的多项式 $(n \geqslant 2)$. 如对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n$ 及 $\mathbb{R}^n$ 上任一旋转 ρ, $P(\rho x) = P(x)$, 那么存在常数 $c_0, c_1, \cdots, c_m$ 使得 $P(x) = \sum_{k=0}^m c_k|x|^{2k}$.

证明 记 $P(x) = \sum_{\ell=0}^j P_\ell(x)$, 其中 $P_\ell(x)$ 为 ℓ 阶齐次多项式. 对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$P(\varepsilon x) = \sum_{\ell=0}^{j} P_\ell(\varepsilon x) = \sum_{\ell=0}^{j} \varepsilon^\ell P_\ell(x).$$

另一方面, 对 $\mathbb{R}^n$ 上任一旋转 ρ,

$$P(\varepsilon x) = \sum_{\ell=0}^{j} P_\ell(\varepsilon \rho x) = \sum_{\ell=0}^{j} \varepsilon^\ell P_\ell(\rho x).$$

由此推出 $P_\ell(\rho x) = P_\ell(x)$, 对 $\ell = 0, 1, \cdots, j$. 令 $F_\ell(x) = \frac{1}{|x|^\ell}P_\ell(x)$, 那么易见 $F_\ell(x)$ 是零阶齐次, 且在旋转下不变. 因此 $F_\ell(x)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上为常数 b_ℓ. 事实上, 对 $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, $F_\ell(x) = F_\ell(|x|x') = F_\ell(x')$. 又对任意的 $x_1', x_2' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $x_1' \neq x_2'$ 有

$$F_\ell(x_1') = F_\ell(\rho x_1') = F_\ell(x_2'),$$

其中旋转 ρ 满足 $\rho x_1' = x_2'$. 这样 $P_\ell(x) = b_\ell |x|^\ell$. 由于 $P_\ell(x)$ 为多项式, 故 ℓ 必为偶数. 因此 $P(x) = \sum_{k=0}^m c_k|x|^{2k}$, 其中 $c_k = b_{2k}$, $k = 0, 1, \cdots, m$, 且 $m = [\frac{j}{2}]$. □

定理 4.3.11 设 $e \in \mathbb{S}^{n-1}$ 且 $Y \in \mathscr{H}_k^n$. 则对一切 $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}$, Y 在 $\mathscr{L}_e(\xi)$ 上为常数当且仅当存在常数 c, 使对 $\forall x' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $Y(x') = cZ_e^{(k)}(x')$.

证明 仅证明必要性. 取 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{S}^{n-1}$, 则存在旋转 τ 使得 $e = \tau e_1$. 对 $\forall x' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 记 $W(x') = Y(\tau x')$. 那么 W 在 $L_{e_1}(\xi)$ 上为常数. 事实上, 如果 ρ 是保持 e_1 不动的旋转, 则 $\tau\rho\tau^{-1}$ 是保持 e 不动的旋转. 由于

$$x' \in L_{e_1}(\xi) \Longleftrightarrow \tau x' \in L_e(\tau\xi),$$

因此对任意的 $x' \in L_{e_1}(\xi)$

$$W(\rho x') = Y(\tau\rho x') = Y(\tau\rho\tau^{-1}(\tau x')) = Y(\tau x') = W(x').$$

如能证明, 存在常数 c 使得对任意的 $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$W(x') = cZ_{e_1}^{(k)}(x'), \tag{4.3.13}$$

那么

$$Y(x') = W(\tau^{-1}x') = cZ_{e_1}^{(k)}(\tau^{-1}x') = cZ_{\tau e_1}^{(k)}(x') = cZ_{e}^{(k)}(x').$$

下面证明 (4.3.13) 式. 设 ρ 是保持 e_1 不动的旋转. 对 $x \neq 0$, 令 $P(x) = |x|^k W(x')$, 那么 $P(\rho x) = |\rho x|^k W(\rho x') = P(x)$. 对任意的 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, 记

$$\rho x = (x_1, y_2, \cdots, y_n).$$

由于 ρ 保持单项式 x_1^m 不变, 如记 $P(x) = \sum_{j=0}^k x_1^{k-j} P_j(x_2, \cdots, x_n)$, 这里 P_j 是 j 阶多项式, 那么

$$\sum_{j=0}^k x_1^{k-j} P_j(x_2, \cdots, x_n) = P(x) = P(\rho x) = \sum_{j=0}^k x_1^{k-j} P_j(y_2, \cdots, y_n).$$

通过比较系数得

$$P_j(x_2, \cdots, x_n) = P_j(y_2, \cdots, y_n). \tag{4.3.14}$$

注意到映射 $(x_2, \cdots, x_n) \to (y_2, \cdots, y_n)$ 是 $n-1$ 维的旋转. 当遍取 $\mathbb{R}^n$ 中一切保持 e_1 不动的旋转时, 便得到所有 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的旋转. (4.3.14) 说明 P_j 在一切 $n-1$ 维的旋转下不变. 运用定理 4.3.1 知 j 必为偶数, 且

$$P_j(x_2, \cdots, x_n) = c_j(x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{j/2}.$$

记 $R = (x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$. 得

$$P(x) = c_0 x_1^k + c_2 x_1^{k-2} R^2 + \cdots + c_{2j} x_1^{k-2j} R^{2j} + \cdots c_{2\ell} x_1^{k-2\ell} R^{2\ell}. \tag{4.3.15}$$

因 $W \in \mathscr{H}_k^n$, 故 $P(x) \in \mathscr{A}_k^n$. 因此

$$0 = \Delta P(x) = \sum_{j=0}^{\ell-1} [c_{2j}\alpha_j + c_{2(j+1)}\beta_j] x_1^{k-2j-2} R^{2j},$$

其中 $\alpha_j = (k-2j)(k-2j-1)$ 且 $\beta_j = 2(j+1)(n+2j-1)$. 由此推出

$$c_{2(j+1)} = -\frac{\alpha_j}{\beta_j} c_{2j}, \quad j = 0, 1, \cdots, \ell - 1. \tag{4.3.16}$$

由 (4.3.16) 知所有系数 $c_0, c_2, \cdots, c_{2\ell}$ 均由 c_0 所确定. 因此两个形如 (4.3.15) 式的调和多项式必定互为常数倍. 另一方面, 上述论证也说明, 任何限制在 $L_{e_1}(\xi)$ 上为常数的 k 阶齐次多项式必具有 (4.3.15) 的形式. 由于 $Z_{e_1}^{(k)}(\frac{x}{|x|})|x|^k$ 正是具有该性质的 k 阶齐次调和多项式, 因此 $P(x) = cZ_{e_1}^{(k)}(\frac{x}{|x|})|x|^k$. 由此即知 (4.3.13) 成立. □

推论 4.3.12 对任意的 $x', y' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 如果函数 $F_{y'}(x')$ 满足以下性质:

(a) 对任意的 $y' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $F_{y'}$ 关于 x' 是 k 阶球调和函数;

(b) 对任意的旋转 ρ, $F_{\rho y'}(\rho x') = F_{y'}(x')$.

那么存在常数 C 使得对任意的 $x', y' \in \mathbb{S}^{n-1}$, $F_{y'}(x') = CZ_{y'}^{(k)}(x')$.

证明 固定 $y' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 设 ρ 是使 y' 保持不动的旋转. 由 (b) 对任意的 $x' \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$F_{y'}(x') = F_{\rho y'}(\rho x') = F_{y'}(\rho x').$$

此说明 $F_{y'}(x')$ 在 $L_{y'}$ 上为常数. 由于 $F_{y'}$ 关于 x' 是 k 阶球调和函数, 应用定理 4.3.11, 存在 $c(y')$ 使 $F_{y'}(x') = c(y')Z_{y'}^{(k)}(x')$. 下面只需证明对任意的 $y_1', y_2' \in \mathbb{S}^{n-1}$ 有 $c(y_1') = c(y_2')$ 即可. 考虑旋转 σ, 使 $\sigma(y_1') = y_2'$. 由 (b) 及引理 4.3.6(c),

$$\begin{aligned} c(y_2')Z_{y_2'}^{(k)}(\sigma x') &= F_{y_2'}(\sigma x') = F_{\sigma y_1'}(\sigma x') = F_{y_1'}(x') \\ &= c(y_1')Z_{y_1'}^{(k)}(x') = c(y_1')Z_{\sigma y_1'}^{(k)}(\sigma x') = c(y_1')Z_{y_2'}^{(k)}(\sigma x'). \end{aligned}$$

故 $c(y_1') = c(y_2')$. □

§4.3.3 Laplace-Beltrami 算子的谱 *

我们知道，在平面内单位圆周上算子 $\frac{d^2}{d\theta^2}$ 的全部特征值为 $\{-k^2\}_{k=0}^{\infty}$，而相应于 $-k^2$ 的特征子空间为 $\mathrm{span}\{\cos k\theta,\ \sin k\theta\}$ $(k = 0, 1, \cdots)$. 如果将单位圆周视为二维的单位球面 $\mathbb{S}^1$，那么 $\mathrm{span}\{\cos k\theta,\ \sin k\theta\}$ 恰好为二维的球调和函数空间 $\mathscr{H}_k^2$. 注意到算子 $\frac{d^2}{d\theta^2}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上 Laplace-Beltrami 算子的二维表现, 因此上述事实启示人们, 球调和函数空间 $\mathscr{H}_k^n$ 与 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的 Laplace-Beltrami 算子的谱必然会有某种联系. 在这一节我们将讨论此问题.

设 ϕ 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上定义的函数，记 $\Phi(x) =: \phi(\frac{x}{|x|})$ 为 ϕ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 中的径向延拓. 称 ϕ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上 k 阶可微（或 k 阶连续可微），如果 Φ 在 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上存在 k 阶偏导数（或存在 k 阶连续偏导数）. 设 ϕ 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上二阶可微，称如下定义的

算子 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 为 Laplace-Beltrami 算子：

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\phi(x') = \Delta\Phi(x)|_{x=x'}, \qquad x' \in \mathbb{S}^{n-1},$$

其中 Δ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的 Laplace 算子.

定理 4.3.13 对 $k \geqslant 0$, $-k(k+n-2)$ 是 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 的特征值，且任一 $Y \in \mathscr{H}_k^n$ 均为 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 的相应于 $-k(k+n-2)$ 的特征函数，即

$$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}Y = -k(k+n-2)Y. \tag{4.3.17}$$

证明 记 $P(x) = |x|^k Y(\frac{x}{|x|})$. 那么对 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$0 = \Delta P(x) = \sum_{j=1}^n \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}|x|^k Y(\frac{x}{|x|}) + 2\frac{\partial}{\partial x_j}|x|^k \frac{\partial}{\partial x_j} Y(\frac{x}{|x|})\right)\right] + |x|^k \Delta Y(\frac{x}{|x|}).$$

这样

$$|x|^k \Delta Y(\frac{x}{|x|}) = -|x|^{k-2}k(k+n-2)Y(\frac{x}{|x|}) - 2k|x|^{k-2}\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} Y(\frac{x}{|x|}). \tag{4.3.18}$$

另一方面，如记 $r = |x|$, 则

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} Y(\frac{x}{|x|}) = \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{r}\frac{\partial}{\partial x_j} Y(\frac{x}{|x|}). \tag{4.3.19}$$

由 (4.3.18) 和 (4.3.19) 即得 (4.3.17). □

最后我们说明 $\mathscr{H}_k^n$ 恰好是算子 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 相应于特征值 $-k(k+n-2)$ 的特征子空间.

定理 4.3.14 Laplace-Beltrami 算子 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 的全部特征值为

$$\lambda_k = -k(k+n-2)\,(k \geqslant 0).$$

$\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 相应于特征值 λ_k 的特征子空间为 $\mathscr{H}_k^n$, 因而其重数为

$$\dim \mathscr{H}_k^n = \mathrm{C}_{n+k-1}^k - \mathrm{C}_{n+k-3}^{k-2}.$$

证明 记 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 相应于特征值 λ_k 的特征子空间为 V_k. 由定理 4.3.13, $\mathscr{H}_k^n \subset V_k\,(k \geqslant 0)$. 现假设 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 还有一特征值 $\lambda \neq \lambda_k\,(k \geqslant 0)$ 且其相应于 λ 的特征子空间为 V_λ, 则对任意的 $k \geqslant 0$, 必定有 $V_\lambda \perp \mathscr{H}_k^n$. 另一方面，由推论 4.3.3 和命题

4.3.4 知 $\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{H}_k^n$ 在 $C^2(\mathbb{S}^{n-1})$ 中稠密，因此 $V_\lambda=\{0\}$，此与 V_λ 为 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 的特征子空间相矛盾.

如果存在 $k\geqslant 0$ 使得 $\mathscr{H}_k^n\subsetneq V_k$，任取 $g\in V_k\setminus\mathscr{H}_k^n$. 那么一方面对一切 $k'\neq k$，由 $V_k\perp\mathscr{H}_{k'}^n$ 知 g 亦与 $\mathscr{H}_{k'}^n$ 正交. 另一方面，由于 $g\notin\mathscr{H}_k^n$, 故 g 也必与 $\mathscr{H}_k^n$ 正交. 综上得 $g=0$, 但此与 g 为 $\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}$ 的特征函数相矛盾. □

§4.4 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换的不变子空间 *

我们现讨论 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 的直和分解问题. 由定理 4.3.5 可知,

$$L^2(\mathbb{S}^{n-1})=\sum_{k=0}^{\infty}\oplus\mathscr{H}_k^n. \tag{4.4.1}$$

对于 $k\in\mathbb{Z}_+$, 记

$$\mathfrak{H}_n^k=\left\{f\in L^2(\mathbb{R}^n):f(x)=\sum_{j=1}f_j(r)P_j(x),\ f_j(|x|)P_j(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$ [1]

其中 $f_j(r)$ 遍取所有的径向函数, P_j 遍取所有 $\mathscr{A}_k^n$ 中的函数. 那么有如下结论:

定理 4.4.1 在下述意义下, $L^2(\mathbb{R}^n)=\sum_{k=0}^{\infty}\oplus\mathfrak{H}_n^k$:

(a) $\mathfrak{H}_n^k$ 均为闭子空间;

(b) $\{\mathfrak{H}_n^k\}$ 两两正交;

(c) $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中函数是 $\{\mathfrak{H}_n^k\}$ 中元素的有限线性组合的极限;

(d) 每个 $\mathfrak{H}_n^k$ 在 Fourier 变换下不变. 即: $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_n^k)=\mathfrak{H}_n^k$.

证明 取 $\{P_j^{(k)}\}_{j=1}^{a_k}$ 为 $\mathscr{A}_k^n$ 中的正交基, 使其满足

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}P_i^{(k)}(x')\overline{P_j^{(k)}(x')}dx'=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

[1]当 $n=2$ 及 $k\in\mathbb{Z}_+$ 时, $\mathfrak{H}_n^k$ 由 §2.2.2 中定义的 $\mathfrak{H}_2^k$ 和 $\mathfrak{H}_2^{-k}$ 所张成.

这样对任意的 $f \in \mathfrak{H}_n^k$, 可记 $f(x) = \sum_{j=1}^{a_k} f_j(|x|)P_j^{(k)}(x)$, 其中 $a_k = \dim \mathscr{A}_k^n$, 且

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx &= \sum_{j=1}^{a_k} \int_{\mathbb{R}^n} |f_j(|x|)|^2 |P_j^{(k)}(x)|^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^{a_k} \int_0^\infty |f_j(r)|^2 r^{n-1+2k} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |P_j^{(k)}(x')|^2 dx' dr \\ &= \sum_{j=1}^{a_k} \int_0^\infty |f_j(r)|^2 r^{n-1+2k} dr.\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

(a) 的证明. 设点列 $\{f^{(m)}\} \subset \mathfrak{H}_n^k$, 且 $\{f^{(m)}\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中收敛到 f. 对任意的 m, 记 $f^{(m)}(x) = \sum_{j=1}^{a_k} f_j^{(m)}(r)P_j^{(k)}(x)$. 由 (4.4.2)

$$\begin{aligned}\|f^{(m)} - f^{(\ell)}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \sum_{j=1}^{a_k} \int_0^\infty |f_j^{(m)}(r) - f_j^{(\ell)}(r)|^2 r^{n-1+2k} dr \\ &= \sum_{j=1}^{a_k} \|f_j^{(m)} - f_j^{(\ell)}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1+2k}dr)}^2.\end{aligned} \tag{4.4.3}$$

由于 $\{f^{(m)}\}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列, 因此由 (4.4.3), 对于 $j = 1, 2, \cdots, a_k$, $\{f_j^{(m)}\}$ 亦为 $L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1+2k}dr)$ 中的 Cauchy 列. 故存在

$$\{f_j\}_{j=1}^{a_k} \subset L^2(\mathbb{R}_+, r^{n-1+2k}),$$

使得在 L^2 的意义下

$$f^{(m)}(x) \to \sum_{j=1}^{a_k} f_j(r)P_j^{(k)}(x), \quad (m \to \infty).$$

从而 $f \in \mathfrak{H}_n^k$, 故 $\mathfrak{H}_n^k$ 闭. 另一方面, 由 $\{\mathscr{H}_k^n\}$ 的两两正交性 (定理 4.3.4) 即可得出结论 (b).

为证结论 (c), 只需证明对 $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 如果 f 与 $\{\mathfrak{H}_n^k\}$ 均正交, 则 f 几乎处处为零即可. 由于

$$\int_0^\infty r^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(rx')|^2 dx' \, dr = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

这样

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(rx')|^2 dx' < \infty \quad \text{a.e.} \quad r \in (0, \infty).$$

因此对 a.e. $r \in (0, \infty)$ 有

$$f(rx') = \sum_{k=0}^\infty Y^{(k)}(rx') = \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=1}^{a_k} b_j^k(r) Y_j^{(k)}(x'). \tag{4.4.4}$$

其中 $\{Y_j^{(k)}\}_{j=1}^{a_k}$ 是 $\mathscr{H}_k^n$ 标准正交基, $k \in \mathbb{Z}_+$. 现对 $k \in \mathbb{Z}_+$, 令

$$g(x) = \sum_{j=1}^{a_k} b_j^k(|x|)|x|^k Y_j^{(k)}(x') \in \mathfrak{H}_n^k.$$

那么 $\langle f, g\rangle = 0$. 另一方面, 由 (4.4.4) 以及 $\{\mathscr{H}_k^n\}$ 的两两正交性, $\{Y_j^{(k)}\}_{j=1}^{a_k}$ 为 $\mathscr{H}_k^n$ 的标准正交基得

$$\begin{aligned}
0 &= \langle f, g\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{k=0}^\infty Y^{(k)}(rx')\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{a_k} b_j^k(r)Y_j^{(k)}(x')\right)}dx'\ r^{k+n-1}dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left(\sum_{\ell=0}^{a_k} b_\ell^k(r)Y_\ell^{(k)}(x')\right)\left(\sum_{j=1}^{a_k} \overline{b_j^k(r)}\overline{Y_j^{(k)}(x')}\right)dx'\ r^{k+n-1}dr \\
&= \sum_{j=1}^{a_k} \int_0^\infty |b_j^k(r)|^2 r^{k+n-1}dr.
\end{aligned}$$

此式说明对于 $k \in \mathbb{Z}_+$ 及 $j = 1, 2, \cdots, a_k$ 均有 $b_j^k(r) = 0\quad$ a.e. $r > 0$. 从而 f 几乎处处为零.

最后我们证明结论 (d). 考虑 $f \in \mathfrak{H}_n^k \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. 那么可写 $f(u) = f_0(\rho)\rho^k Y(u')$, 其中 $\rho = |u|$, $Y \in \mathscr{H}_k^n$. 易知, 所有这类函数的有限线性组合的全体在 $\mathfrak{H}_n^k$ 中是稠密的. 这样

$$\begin{aligned}
\hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot u}du \\
&= \int_0^\infty f_0(\rho)\rho^{k+n-1}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y(u')e^{-2\pi i r\rho x'\cdot u'}du'\right)d\rho.
\end{aligned}$$

如能证明, 存在函数 $\varphi(s)$ 使得对 $s \geqslant 0$,

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y(u')e^{-2\pi i s x'\cdot u'}du' = \varphi(s)Y(x'). \tag{4.4.5}$$

那么由 (4.4.5)

$$\hat{f}(x) = \left\{\int_0^\infty f_0(\rho)\rho^{k+n-1}\varphi(r\rho)d\rho\right\}Y(x') = \frac{\psi(r)}{r^k}\cdot r^k Y(x'),$$

这里 $\psi(r) = \int_0^\infty f_0(\rho)\rho^{k+n-1}\varphi(r\rho)d\rho$ 且 $r = |x|$. 因此 $\hat{f}(x) \in \mathfrak{H}_n^k$. 现给出 (4.4.5)

的证明. 运用带调和函数的定义

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} Y(u')du' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y(v') Z_{u'}^{(k)}(v')dv' \right\} du' \qquad (4.4.6)\\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y(v') \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} Z_{u'}^{(k)}(v')du' \right\} dv'.
\end{aligned}$$

现记

$$F_{s,x'}(v') = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} Z_{v'}^{(k)}(u')du'.$$

如能证明存在常数 $c = \varphi(s)$ 使得对 $\forall x', v' \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$F_{s,x'}(v') = \varphi(s) Z_{x'}^{(k)}(v'), \qquad (4.4.7)$$

那么由 (4.4.6) 和 (4.4.7) 即可得 (4.4.5)

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} Y(u')du' = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Y(v') \{\varphi(s) Z_{x'}^{(k)}(v')\} dv' = \varphi(s) Y(x').$$

因此问题归结为 (4.4.7) 的证明. 首先 $F_{s,x'}$ 与 $\mathscr{H}_j^n$ $(j \neq k)$ 正交. 事实上, 任取 $Y^{(j)} \in \mathscr{H}_j^n$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} F_{s,x'}(v') Y^{(j)}(v')dv' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} Z_{v'}^{(k)}(u')du' \right\} Y^{(j)}(v')dv' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot u'} \left\{ \int_{\mathbb{S}^{n-1}} Z_{u'}^{(k)}(v') Y^{(j)}(v')dv' \right\} du' = 0.
\end{aligned}$$

这样由 (4.4.6), 必有 $F_{s,x'} \in \mathscr{H}_k^n$. 现设 σ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转, 那么

$$\begin{aligned}
F_{s,\sigma x'}(\sigma v') &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s\langle \sigma x', u'\rangle} Z_{\sigma v'}^{(k)}(u')du' \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s\langle \sigma x', \sigma w'\rangle} Z_{\sigma v'}^{(k)}(\sigma w')dw' \qquad (\text{令} u' = \sigma w') \\
&= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi i s x'\cdot w'} Z_{v'}^{(k)}(w')dw' = F_{s,x'}(v').
\end{aligned}$$

由定理 4.3.11 知 (4.4.7) 成立. 再由 $\mathfrak{H}_n^k \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ 在 $\mathfrak{H}_n^k$ 中稠密且 $\mathfrak{H}_n^k$ 是闭的, 因此 $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_n^k) \subset \mathfrak{H}_n^k$. 事实上, 我们仍然有 $\mathscr{F}(\mathfrak{H}_n^k) = \mathfrak{H}_n^k$ （见定理 2.2.9(b) 的证明中最后的说明）. □

我们现在进一步研究 Fourier 变换在 $\mathfrak{H}_n^k$ 上的作用. 首先考虑 $\mathfrak{H}_n^0$（即径向函数类）上的 Fourier 变换. 一个事实是，径向函数的 Fourier 变换仍为径向函数（这对于 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中的径向函数均成立）. 当 $n=2$ 时, 由定理 2.2.10 知径向函数的 Fourier 变换可通过 Bessel 函数的积分来表现. 下面将上述结论推广至 n 维. 先给出 Bessel 函数 J_k 的定义 $(k>-\frac{1}{2})$:

$$J_k(t)=\frac{(\frac{t}{2})^k}{\Gamma(\frac{2k+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\int_{-1}^1 e^{its}(1-s^2)^{\frac{2k-1}{2}}ds,\quad t>0.$$

定理 4.4.2 设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)\,(n\geqslant 2)$ 为径向函数, $f(x)=f_0(|x|)$, 则对任意的 $x\in\mathbb{R}^n$, $\hat{f}(x)=F_0(|x|)$, 其中

$$F_0(|x|)=F_0(r)=2\pi r^{-\frac{n-2}{n}}\int_0^\infty f_0(s)J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)s^{\frac{n}{2}}ds.$$

证明 因为 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $f(x)=f_0(|x|)$, 则 $\int_0^\infty |f_0(r)|r^{n-1}dr<\infty$. 因此,

$$\begin{aligned}F_0(r)=\hat{f}(x)&=\int_{\mathbb{R}^n} f(u)e^{-2\pi i x\cdot u}du\\&=\int_0^\infty f_0(s)\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi irs(x',u')}du'\right)s^{n-1}ds.\end{aligned}$$

对固定的 x', 令 $L_\theta=\{u'\in\mathbb{S}^{n-1}:x'\cdot u'=\cos\theta\}\,(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$. 记 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中单位球面 $\mathbb{S}^{n-2}$ 的面积为 ω_{n-2}, 则 L_θ 的测度

$$|L_\theta|=\omega_{n-2}(\sin\theta)^{n-2}=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}(\sin\theta)^{n-2}.$$

这样

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{-2\pi isr(x'\cdot u')}du'&=\int_0^\pi\int_{L_\theta} e^{-2\pi irs\cos\theta}du'd\theta\\&=\omega_{n-2}\int_0^\pi e^{-2\pi irs\cos\theta}(\sin\theta)^{n-2}d\theta\\&=\omega_{n-2}\int_{-1}^1 e^{2\pi irs\xi}(1-\xi^2)^{(n-3)/2}d\xi\\&=\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\cdot\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}{(\pi rs)^{(n-2)/2}}J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs).\end{aligned}$$

因此, $F_0(|x|)=F_0(r)=2\pi r^{-\frac{n-2}{n}}\int_0^\infty f_0(s)J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rs)s^{\frac{n}{2}}ds$. □

[注 4.4.1] 定理 4.4.2 的结论对 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中径向函数亦成立.

定理 4.4.3 设 $f(u)=e^{-\pi|u|^2}P_k(u)$, $u\in\mathbb{R}^n$, $P_k(u)\in\mathscr{A}_k^n$ 是 k 阶球体调和函数. 则 $\hat{f}(v)=i^{-k}f(v)$, $v\in\mathbb{R}^n$.

证明 固定 $t\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi|u|^2}P_k(u+t)du=\int_0^\infty r^{n-1}\cdot e^{-\pi r^2}\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}P_k(t+ru')du'\right)dr.$$

因为 P 调和, 故满足平均值性质. 即

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}P_k(t+ru')du'=\omega_{n-1}P_k(t).$$

因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi|u|^2}P_k(u+t)du&=P_k(t)\int_0^\infty\omega_{n-1}r^{n-1}e^{-\pi r^2}dr\\&=P_k(t)\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\pi|u|^2}du=P_k(t).\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

由于

$$\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi iu\cdot v}e^{-\pi|u|^2}du=e^{-\pi|v|^2},\tag{4.4.9}$$

用 $P_k(D_v)$ 作用 (4.4.9) 两边得

$$\begin{aligned}P_k(D_v)e^{-\pi|v|^2}&=P_k(D_v)\int_{\mathbb{R}^n}e^{-2\pi iu\cdot v}e^{-\pi|u|^2}du\\&=\int_{\mathbb{R}^n}P_k(-2\pi iu)e^{-2\pi iu\cdot v}e^{-\pi|u|^2}du\\&=(-2\pi i)^k\int_{\mathbb{R}^n}P_k(u)e^{-2\pi iu\cdot v}e^{-\pi|u|^2}du.\end{aligned}$$

这样,

$$\int_{\mathbb{R}^n}P_k(u)e^{-2\pi iu\cdot v}e^{-\pi|u|^2}du=\frac{1}{(-2\pi i)^k}P_k(D_v)e^{-\pi|v|^2}:=Q(v)e^{-\pi|v|^2}.$$

下面只须证明

$$Q(v)=P_k(-iv).\tag{4.4.10}$$

因为

$$\begin{aligned}Q(v)&=\int_{\mathbb{R}^n}P_k(u)e^{-2\pi iu\cdot v}e^{-\pi|u|^2}\cdot e^{\pi|v|^2}du\\&=\int_{\mathbb{R}^n}P_k(u)e^{-\pi(|u|^2+2\pi iu\cdot v-|v|^2)}du\\&=\int_{\mathbb{R}^n}P_k(u)e^{-\pi\sum_{j=1}^n(u_j+iv_j)^2}du,\end{aligned}$$

若

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_k(u)e^{-\pi\sum_{j=1}^n(u_j+iv_j)^2}du = \int_{\mathbb{R}^n} P_k(u-iv)e^{-\pi|u|^2}du, \tag{4.4.11}$$

那么由 (4.4.8)

$$Q(iv) = \int_{\mathbb{R}^n} P_k(u+v)e^{-\pi|u|^2}du = P_k(v).$$

从而得到了 (4.4.10). 下面仅对 u_1 的情形证明 (4.4.11) 式. 令 $z = u_1 + iw$, 则 $e^{-\pi(z+iv_1)^2}P_k(z, u_2, \cdots, u_n)$ 在 z 平面上解析. 设 Γ 是由 z 平面上的点 $(-R, 0)$, $(-R, -iv_1)$, $(R, -iv_1)$, $(R, 0)$ 为顶点组成的矩形的边界, 其方向为逆时针方向. 那么

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Gamma e^{-\pi(z+iv_1)^2}P_k(z, u_2, \cdots, u_n)dz \\
&= \int_{-R}^{R} e^{-\pi|u_1|^2}P_k(u_1 - iv_1, u_2, \cdots, u_n)du_1 \\
&\quad + \int_{-iv_1}^{0} e^{-\pi(R+iw+iv_1)^2}P_k(R+iw, u_2, \cdots, u_n)idw \\
&\quad + \int_{R}^{-R} e^{-\pi(u_1+iv_1)^2}P_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)du_1 \\
&\quad + \int_{0}^{-iv_1} e^{-\pi(-R+iw+iv_1)^2}P_k(-R+iw, u_2, \cdots, u_n)idw.
\end{aligned}$$

令 $|R| \to 0$ 得,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi u_1^2}P_k(u_1 - iv_1, u_2, \cdots, u_n)du_1 \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(u_1+iv_1)^2}P_k(u_1, u_2, \cdots, u_n)du_1.
\end{aligned}$$

□

[注 4.4.2] 注意到 $e^{-\pi|\cdot|^2}P_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 因此定理 4.4.3 表明, 对于空间 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 而言, $e^{-\pi|\cdot|^2}P_k$ 均是 Fourier 变换相应于特征值 $(-i)^k$ 的特征函数.

下面考虑更大的一个函数类.

设 $\alpha > 0$, P_k 仍记作 k 阶齐次调和函数, $f(x) = e^{-\pi|x|^2}P_k(x)$. 对 $x \in \mathbb{R}^n$, 令

$$g(x) = e^{-\pi|\alpha x|^2}P_k(x) = \alpha^{-k}f(\alpha x).$$

因此由定理 4.4.3

$$\hat{g}(x)=\alpha^{-k}\cdot\alpha^{-n}\cdot\hat{f}(\tfrac{x}{\alpha})\quad\begin{aligned}&=\alpha^{-k-n}\cdot i^{-k}\cdot f(\tfrac{x}{\alpha})\\&=\alpha^{-2k-n}\cdot i^{-k}e^{-\pi|x|^2/\alpha^2}P_k(x).\end{aligned}\tag{4.4.12}$$

另一方面，令 $h(u)=e^{-\pi|\alpha u|^2}$, $u\in\mathbb{R}^{n+2k}$. 那么由命题 2.1.9 知

$$\hat{h}(u)=\alpha^{-2k-n}e^{-\pi|u|^2/\alpha^2}.\tag{4.4.13}$$

现对 $m\in\mathbb{N}$, 引进 $(0,\infty)$ 上的 Hilbert 空间:

$$\mathcal{H}_m=\left\{\varphi(r):\|\varphi\|_{\mathcal{H}_m}=\left(\int_0^\infty|\varphi(r)|^2r^{m-1}dr\right)^{1/2}<\infty\right\},$$

其内积定义为:

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\int_0^\infty\varphi(r)\overline{\psi(r)}r^{m-1}dr.$$

若取 $m=n+2k$, $P_k\in\mathscr{A}_k(\mathbb{R}^n)$, $\varphi\in\mathcal{H}_{n+2k}$ 且 $g(x)=\varphi(|x|)P_k(x)\,(x\in\mathbb{R}^n)$, 那么

$$\|g\|_2^2=\int_{\mathbb{R}^n}|\varphi(|x|)P_k(x)|^2dx=\int_0^\infty|\varphi(r)|^2r^{n+2k-1}dr\cdot\|P_k\|^2_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}<\infty,$$

其中

$$\|P_k\|_{L^2(\mathbb{S}^{n-1})}=\left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|P_k(x')|^2dx'\right)^{1/2}.$$

因为 $g\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 由 Plancherel 定理知, $\hat{g}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|\hat{g}\|_2=\|g\|_2$. 又由定理 4.4.1 的证明过程知, 对 a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, $\hat{g}(x)=\psi(|x|)P_k(x)$. 因此 $\psi\in\mathcal{H}_{n+2k}$ 且 $\|\psi\|_{\mathcal{H}_{n+2k}}=\|\varphi\|_{\mathcal{H}_{n+2k}}$. 这样定义了 $\mathcal{H}_{n+2k}$ 上的有界线性算子 T_k^n, 使得 $T_k^n(\varphi)=\psi$. 显然, T_k^n 是等距算子.

现考虑另外一个径向函数, $h(x)=\varphi(|x|)$, $x\in\mathbb{R}^{n+2k}$, $\varphi(r)\in\mathcal{H}_{n+2k}$. 由于

$$\begin{aligned}\|h\|_2^2&=\int_{\mathbb{R}^{n+2k}}|\varphi(|x|)|^2dx\\&=\omega_{n+2k-1}\int_0^\infty|\varphi(r)|r^{n+2k-1}dr\\&=\omega_{n+2k-1}\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_{n+2k}}<\infty,\end{aligned}$$

因此 $h\in L^2(\mathbb{R}^{n+2k})$. 由于 h 为径向函数, 则 $\hat{h}(x)=\theta(|x|)$ 也是径向函数. 令 $T_0^{n+2k}\varphi=\theta$, 易证 $\theta\in\mathcal{H}_{n+2k}$, 从而 $T_0^{n+2k}\varphi$ 也是等距算子. (4.4.12) 和 (4.4.13) 表明, 当 $\varphi=e^{-\varepsilon r^2}$ $(\varepsilon>0)$ 时, $T_0^{n+2k}\varphi=i^kT_k^n\varphi$. 如果记

$$W=\{e^{-\varepsilon r^2}\text{的有限线性组合};\varepsilon>0\},$$

则算子 T_0^{n+2k} 与 $i^kT_k^n$ 作用在 W 是一致的.

现说明 W 在 $\mathcal{H}_{n+2k}$ 中稠密. 若不然, 存在 $b\in\mathcal{H}_{n+2k}$, $b\neq 0$, a.e., 且对任意的 $\varphi\in W$,

$$\int_0^\infty \varphi(r)b(r)r^{n+2k-1}dr=0.$$

特别地, 对任意的 $\varepsilon>0$,

$$\int_0^\infty e^{-\varepsilon r^2}b(r)r^{n+2k-1}dr=0. \tag{4.4.14}$$

记

$$\Phi(s)=\int_0^s e^{-r^2}b(r)r^{n+2k-1}dr \quad (s\geqslant 0).$$

在 (4.4.14) 中令 $\varepsilon=m+1$, m 为正整数, 由分部积分得:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty e^{-(m+1)r^2}b(r)r^{n+2k-1}dr\\
&= \int_0^\infty e^{-mr^2}\Phi'(r)dr\\
&= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-mr^2}\Phi'(r)dr\\
&= \lim_{a\to\infty}\left[e^{-ma^2}\Phi(a)+\int_0^a 2mre^{-mr^2}\Phi(r)dr\right]\\
&= 2m\int_0^\infty e^{-mr^2}\Phi(r)rdr\\
&= \int_0^1 u^{m-1}\Phi\left(\sqrt{\log\frac{1}{u}}\right)du. \qquad (m=1,2,3,\cdots)
\end{aligned} \tag{4.4.15}$$

由于多项式在 $[0,1]$ 中的连续函数空间中稠密, 故对任意的 $u\in[0,1]$, 只有当 $\Phi(\sqrt{\log\frac{1}{u}})=0$ 时, (4.4.15) 成立. 即对任意的 $r\in(0,\infty)$, $\Phi(r)=0$, 从而

$$\Phi'(r)=e^{-r^2}b(r)r^{n+2k-1}=0 \quad \text{a.e. } r\in(0,\infty).$$

于是 $b(r)=0$, 但此与已知矛盾.

由于 T_0^{n+2k} 与 iT_k^n 均为有界算子, 且它们作用在 W 上相同, 而 $\overline{W}=\mathcal{H}_{n+2k}$, 故对任意的 $\varphi\in\mathcal{H}_{n+2k}$, $T_0^{n+2k}\varphi=i^kT_k^n\varphi$. 运用这个结论, 我们可以得到下面重要结果.

定理 4.4.4 设 $n\geqslant 2$, $f(x)=f_0(|x|)P_k(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $P_k\in\mathscr{A}_k$. 则 $\hat{f}(x)=F_0(|x|)P_0(x)$, 其中

$$F_0(r)=2\pi i^{-k}r^{-(n+2k-2)/2}\int_0^\infty f_0(s)J_{(n+2k-2)/2}(2\pi rs)s^{(n+2k)/2}ds. \tag{4.4.16}$$

证明 事实上, 由于 $f(x)=f_0(|x|)P_k(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 推出 $f_0(r)\in\mathcal{H}_{n+2k}$; 而 $\hat{f}(x)=F_0(|x|)P_0(x)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, 得到 $F_0(r)\in\mathcal{H}_{n+2k}$. 这样,

$$i^kT_k^nf_0=i^kF_0(r).$$

另一方面,

$$i^kT_k^nf_0=T_0^{n+2k}f_0:=\hat{f}_0.$$

因此

$$\hat{f}_0(r)=2\pi r^{-(n+2k-2)/2}\int_0^\infty f_0(s)J_{(n+2k-2)/2}(2\pi rs)s^{(n+2k)/2}ds,$$

从而

$$\begin{aligned}F_0(r)&=i^{-k}\hat{f}(r)\\&=2\pi i^{-k}r^{-(n+2k-2)/2}\int_0^\infty f_0(s)J_{(n+2k-2)/2}(2\pi rs)s^{(n+2k)/2}ds.\end{aligned}$$

□

[注 4.4.3] 定理 4.4.4 的结论可推广到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 和 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中. (4.4.16) 实际上已给出了 $\mathfrak{H}_n^k$ 中函数 Fourier 变换的特征.

习 题 四

1. 证明调和函数的最小值原理：设 u 为区域 Ω 内的调和函数, 且满足 $B = \inf\limits_{x\in\Omega} u(x) > -\infty$. 如果 u 不是常值函数, 那么对 $\forall x \in \Omega$, 有 $u(x) > B$.

2. 设 u_1, u_2 均在有界区域 Ω 内调和, 在 Ω 的闭包 $\overline{\Omega}$ 上连续. 证明：

(i) 如 u_1 不是常值函数, 那么 u_1 的最大值（最小值）仅在 Ω 的边界 $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$ 上达到;

(ii) 如在 $\partial\Omega$ 上 $u_1 = u_2$, 那么对 $\forall x \in \overline{\Omega}$, $u_1(x) = u_2(x)$.

3. 设 $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$. 证明: 存在 $C_\alpha > 0$, 使得对任意调和函数 u, 如果 $\sup\limits_{x\in B(a,r)} |u(x)| \leqslant M$, 那么

$$|D^\alpha u(a)| \leqslant C_\alpha \frac{M}{r^{|\alpha|}}.$$

4. 设 F 为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的可测函数. 证明：

(i) 如 F 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处存在非切向极限（见定义 1.3.6）, 则 F 在点 x_0 处非切向有界;

(ii) 如 F 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上连续, 那么 F 在点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处非切向有界当且仅当存在 $\alpha > 0$, 使得 F 在 $\Gamma_\alpha^1(x_0)$ 上有界.

5. $\mathbb{R}^n$ 中区域 Ω 上定义的函数 f 称为实解析的, 如果对每一个 $a \in \Omega$ 及在 a 的任一邻域 $U(U \subset \Omega)$ 中 $f(x) = \sum_\alpha C_\alpha (x-a)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Z}_+^n)$, 且此幂级数在 U 中绝对收敛.

证明: Ω 上的调和函数必为实解析函数.

6. 设 $n \geqslant 2$, $D = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ 且 $P(D)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上常系数微分多项式.

证明：对 $\mathbb{R}^n$ 上的一切旋转 R_ρ,

$$P(D)R_\rho = R_\rho P(D) \Longleftrightarrow P(D) = c_0 I + c_1\Delta + \cdots + c_m\Delta,$$

这里 $c_j\,(j = 1, 2, \cdots, m)$ 为常数, I 记恒等算子, 且 Δ 为 Laplace 算子.

第五章　奇异积分算子

在这一章我们将研究 Hilbert 变换, Riesz 变换和奇异积分算子的基本性质. Hilbert 变换是分析领域中非常重要的基本算子之一，它来源于复分析，并与小波分析、函数空间理论有着密切联系. Riesz 变换是 Hilbert 变换的高维形式，它在复和实的 Hardy 空间和 BMO 空间的刻画方面起着关键作用. 本质上，奇异积分算子是 Hilbert 变换和 Riesz 变换的推广. 另一方面，经典的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子也直接来源于二阶椭圆方程解的正则性研究，且奇异积分算子及其各种变形在偏微分方程解的存在性和正则性研究中正发挥着十分重要的作用.

§5.1　Hilbert 变换

在本节我们首先通过 Hilbert 变换产生的背景给出它的定义，并深入研究 Hilbert 变换基本性质. 由第一章和第四章知道，对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$，其 Poisson 积分 u 为 $\mathbb{R}^2_+$ 内的调和函数，且 u 在 $\mathbb{R}$ 上的非切向边界值几乎处处为 f. 我们将看到, 当 $1 \leqslant p < \infty$ 时，$L^p(\mathbb{R})$ 函数 f 的 Hilbert 变换 Hf 的 Poisson 积分恰好是 u 的共轭调和函数.

§5.1.1　$\mathbb{R}$ 上 Cauchy 型积分的边界值

设 $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$. 考虑 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 型积分:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-z}dt := \lim_{N\to\infty} F_N(z), \tag{5.1.1}$$

这里 $z = x + iy$, $y > 0$ 且

$$F_N(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-N}^{N} \frac{f(t)}{t-z}dt, \qquad N > 0.$$

由于 $F_N(z)$ 为 $\mathbb{R}^2_+$ 内的解析函数, 因此 $F(z)$ 亦在 $\mathbb{R}^2_+$ 内解析. 注意到

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{y}{(x-t)^2+y^2} f(t)dt + \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} f(t)dt \\ &:= \frac{1}{2}\Big[(P_y * f)(x) + i(Q_y * f)(x)\Big]. \end{aligned}$$

这里 $P_y(t) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{t^2+y^2}$ 为熟知的 $\mathbb{R}^2_+$ 中的 Poisson 核, $P_y * f$ 为 f 的 Poisson 积分. 而 $Q_y(t) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+y^2}$ 称为 $\mathbb{R}^2_+$ 中的共轭 Poisson 核. 积分

$$v(x,y) =: 2\mathrm{Im}(F(z)) = Q_y * f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} f(t)dt$$

称为 f 的共轭 Poisson 积分. 由定理 4.2.1 及推论 1.3.4, 定理 1.3.8 知道, $P_y * f$ 为 $\mathbb{R}^2_+$ 内的调和函数，且当 $y \to 0$ 时，在 f 的 Lebesgue 点 x 处，$P_y * f$ 的径向和非切向极限均为 $f(x)$. 另一方面，由于 $F(z)$ 在 $\mathbb{R}^2_+$ 内解析，因此 $Q_y * f(x)$ 也必然为 $\mathbb{R}^2_+$ 内的调和函数. 这样，一个自然的问题是：当 $y \to 0$ 时，$Q_y * f(x)$ 是否 a.e. 存在极限？如果极限存在，它与 f 的关系如何？

命题 5.1.1 对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$，f 的共轭 Poisson 积分在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处存在有限的非切向极限.

证明 由于 f 可表为两个非负函数之差，故不妨设 $f \geqslant 0$. 分别记 f 的 Poisson 积分和共轭 Poisson 积分为 u 和 v, 则 $u \geqslant 0$. 令 $G(z) = e^{-(u(x,y)+iv(x,y))}$, 那么 G 在 $\mathbb{R}^2_+$ 内解析且满足 $|G(z)| = e^{-u(x,y)} \leqslant 1$. 当 $y \to 0$ 时, 在 f 的 Lebesgue 点处 G 存在非切向极限. 从而 G 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处存在非切向极限（见 [31] 或 [40]）. 该极限不可能在 $\mathbb{R}$ 的任何正测度子集上为零. 若不然，则 u 在该子集上的非切向极限为 ∞. 但 u 是 f 的 Poisson 积分，此与 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 矛盾. 从而 $F(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处存在有限的非切向极限, 故 $v(x,y)$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处存在有限的非切向极限. □

引理 5.1.2 设 $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$, 则在 f 的 Lebesgue 点 x 处,

$$\lim_{y\to 0} Q_y * f(x) = \lim_{y\to 0} H_y f(x), \tag{5.1.2}$$

其中对 $y > 0$,

$$H_y f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>y} \frac{f(t)}{x-t}dt.$$

证明 首先说明在 f 的 Lebesgue 点 x 处

$$\lim_{y\to 0}\left\{\int_{\mathbb{R}} \frac{x-t}{(x-t)^2+y^2} f(t)dt - \int_{|x-t|>y} \frac{f(t)}{x-t}dt\right\} = 0. \tag{5.1.3}$$

令

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{t^2+1}-\dfrac{1}{t}, & |t|>1,\\ \dfrac{t}{t^2+1}, & |t|\leqslant 1.\end{cases}$$

记 $\varphi_y(t)=\frac{1}{y}\varphi(\frac{t}{y})\ (y>0)$. 为证 (5.1.3), 只需说明在 f 的 Lebesgue 点 x 处

$$\lim_{y\to 0}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)\varphi_y(t)dt=0. \tag{5.1.4}$$

注意到

$$\psi(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+|t|^2}, & |t|>1,\\ 1, & |t|\leqslant 1\end{cases}$$

为 φ 的递减径向控制函数. 由于 ψ 和 φ 均可积且 φ 为奇函数, 应用定理 1.3.2 知道, 在 f 的 Lebesgue 点 x 处 (5.1.4) 成立. 另一方面, 由定理 1.3.6, 对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 均有

$$\sup_{y>0}\left|Q_y*f(x)-\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>y}\frac{f(t)}{x-t}dt\right|\leqslant 5Mf(x), \tag{5.1.5}$$

这里 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子. 上式表明, 对几乎所有的 $x\in\mathbb{R}$, (5.1.2) 两边的极限同时存在或同时不存在 (由 [注 1.2.2]). 再联系 (5.1.3) 便知引理的结论成立. □

引理 5.1.2 给出了 Q_y*f 在 f 的 Lebesgue 点处的径向极限表达式. 因此如果令 Hf 表示 f 的共轭 Poisson 积分 Q_y*f 在 $\mathbb{R}$ 上的径向极限, 并称其为 f 的 Hilbert 变换, 那么引理 5.1.2 实际上已给出了 $L^p(\mathbb{R})\ (1\leqslant p<\infty)$ 函数的 Hilbert 变换的存在性:

定理 5.1.3 设 $f\in L^p(\mathbb{R})\ (1\leqslant p<\infty)$. 那么在 f 的 Lebesgue 点 x 处, 其 Hilbert 变换的值 $Hf(x)$ 有限, 且有

$$Hf(x)=\text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(t)}{x-t}dt=\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon f(x). \tag{5.1.6}$$

由此可知, f 的 Hilbert 变换 Hf 在 $\mathbb{R}$ 上是几乎处处有定义的.

综合前面的结果我们得到, 对 $f\in L^p(\mathbb{R})\ (1\leqslant p<\infty)$, f 的共轭 Poisson 积分 Q_y*f 在 $\mathbb{R}$ 上的径向和非切向极限均几乎处处为 f 的 Hilbert 变换 Hf. 由此可得下面的结论:

定理 5.1.4 设 $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$，那么由 (5.1.1) 式定义的 $\mathbb{R}$ 上 Cauchy 型积分 $F(z)\,(z = x+iy, y>0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上的径向边界值和非切向边界值均几乎处处为 $\frac{1}{2}(f(x)+iHf(x))$.

§5.1.2 Hilbert 变换的 L^2 理论

在讨论 Hilbert 变换的基本性质之前，先看一个例子. 记 $K(t) = t^{-1}\,(t \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$, 很明显 K 在含零点的任一区间内不可积，故 $K \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. 然而，按下面的定义 5.1.1, K 是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 中的主值广义函数.

定义 5.1.1 对函数 K, 令

$$L_K(\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} K(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall\, \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

如 $L_K \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 则称 K 为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的主值广义函数, 此时记 L_K 为 p.v.K.

引理 5.1.5 令 $k(t) = \mathrm{p.v.}\frac{1}{\pi t}$，那么 k 为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 中的主值广义函数，且 $\hat{k}(\xi) = -i\operatorname{sgn}\xi$.[1]

证明 任取 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}
|L_k(\varphi)| &= \left|\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{\varphi(t)}{t}dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|>1}\frac{\varphi(t)}{t}dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{|t|\leqslant 1}\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\right|dt + \frac{1}{\pi}\int_{|t|>1}\left|\frac{\varphi(t)}{t}\right|dt \\
&\leqslant \frac{2}{\pi}\|\varphi'\|_\infty + \frac{2}{\pi}\sup_{t\in\mathbb{R}}|t\varphi(t)| \leqslant C.
\end{aligned}$$

---

[1]本书中 sgn 为符号函数, 其定义为：

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1, & t>0, \\ 0, & t=0, \\ -1, & t<0. \end{cases}$$

因此 k 为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 中的主值广义函数. 现任取 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\hat{k}(\varphi) = k(\hat{\varphi}) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)e^{-2\pi it\xi}dt\frac{d\xi}{\xi}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\frac{1}{\pi}\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}e^{-2\pi it\xi}\frac{d\xi}{\xi}\right)dt\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}}\varphi(t)\left(\frac{-i}{\pi}\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}\sin(2\pi t\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right)dt.\end{aligned}$$

回顾

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2},$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-i}{\pi}\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant\frac{1}{\varepsilon}}\sin(2\pi t\xi)\frac{d\xi}{\xi} = -i\operatorname{sgn} t.$$

由 Lebesgue 控制收敛定理有 $\hat{k}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}}\varphi(t)(-i\operatorname{sgn} t)dt$. 从而 $\hat{k}(\xi) = -i\operatorname{sgn}\xi$. □

这样, 由 Hilbert 变换的定义 (5.1.6), 对 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $H\varphi(x) = k * \varphi(x)$, 且

$$\widehat{H\varphi}(\xi) = -i\operatorname{sgn}\xi\cdot\hat{\varphi}(\xi). \tag{5.1.7}$$

Hilbert 变换具有以下基本性质:

定理 5.1.6 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$,

(a) $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$;

(b) $H(Hf)(x) = -f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}$;

(c) $H' = -H$, 这里 H' 记 H 的共轭算子, 即: $\langle Hf, g\rangle = \langle f, H'g\rangle$, 而 $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx$;

(d) $H^t = -H$, 这里 H^t 记 H 的转置算子, 其满足: $\int_{\mathbb{R}} Hf(x)g(x)dx = \int_{\mathbf{R}} f(x)H^t g(x)dx$;

(e) $Hf\cdot Hg = fg + H(gHf + fHg)$, 这里 $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. 特别地, 对 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $(Hf)^2 = f^2 + 2H(fHf)$.

证明 由 (5.1.7) 和 Plancherel 定理 (定理 2.2.2) 知 H 是 $L^2(\mathbb{R})\bigcap\mathscr{S}(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ 的有界线性算子. 再由定理 3.3.4 便得到结论 (a). 再次应用 (5.1.7) 及 $(-i\operatorname{sgn}\xi)^2 = -1\,(\xi \neq 0)$, 故 (b) 成立. 现任取 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ 并应用定理 2.2.4 和乘

法公式（推论 2.2.3）

$$\begin{aligned}\langle Hf,g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} Hf(x)(\mathscr{F}^{-1}\bar{g})^\wedge(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{Hf}(x)(\mathscr{F}^{-1}\bar{g})(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} -i\mathrm{sgn}\, x\hat{f}(x)\widehat{\bar{g}}(-x)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} -i\mathrm{sgn}\, x\widehat{\bar{g}}(x)\hat{f}(-x)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} \widehat{\overline{Hg}}(x)(\mathscr{F}^{-1}f)(x)dx\\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{Hg}(x)dx\\ &= -\langle f, Hg\rangle.\end{aligned}$$

这样得到 (c). 类似可证明 (d). 最后给出 (e) 的证明. 记 $m(\xi) = -i\mathrm{sgn}\xi$. 运用 Fourier 变换,

$$(fg + H(gHf + fHg))^\frown(\xi) = (\hat{f} * \hat{g})(\xi) + m(\xi)(\hat{g} * \widehat{Hf})(\xi) + m(\xi)(\hat{f} * \widehat{Hg})(\xi).$$

注意到

$$(\hat{f} * \widehat{Hg})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)m(\xi-\eta)d\eta,$$

和

$$(\hat{g} * \widehat{Hf})(\xi) = \int_{\mathbb{R}} m(\eta)\hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)d\eta.$$

因此

$$\begin{aligned} m(\xi)(\hat{g} * \widehat{Hf})(\xi) &+ m(\xi)(\hat{f} * \widehat{Hg})(\xi)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)m(\xi)[m(\eta) + m(\xi-\eta)]d\eta. \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

另一方面，有等式

$$1 + m(\xi)[m(\eta) + m(\xi-\eta)] = m(\eta)m(\xi-\eta). \tag{5.1.9}$$

由 (5.1.8)(5.1.9) 得

$$\begin{aligned}(fg + H(gHf + fHg))^\frown(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)\{1 + m(\xi)[m(\eta) + m(\xi-\eta)]\}d\eta\\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)m(\eta)m(\xi-\eta)d\eta\\ &= (\widehat{Hf} * \widehat{Hg})(\xi) = (\widehat{Hf\cdot Hg})(\xi).\end{aligned}$$

这样完成了 (e) 的证明. □

[注 5.1.1] 定理 5.1.6 的结论 (a) 和 (b) 表明 Hilbert 变换是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的酉算子. 结论 (b) 实际上也给出了 $L^2(\mathbb{R})$ 上 Hilbert 变换的反演公式, 即

$$f(x) = -\text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{Hf(t)}{x-t}dt = -\lim_{\varepsilon\to 0}H_\varepsilon(Hf)(x), \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}. \tag{5.1.10}$$

结论 (c) 说明 Hilbert 变换是 $L^2(\mathbb{R})$ 上的反对称算子. 结论 (e) 中的等式也称为 Cotlar 等式, 它由 M. Cotlar 在 1955 年证明.

由 Hilbert 变换的定义 (5.1.6) 容易验证, H 在 $L^p(\mathbb{R})\,(1\leqslant p<\infty)$ 上满足以下性质:

(a) 与平移 τ_h 可交换, 即 $\tau_h H = H\tau_h$;

(b) 与伸缩 $\eta_a\,(a>0)$可交换, 即 $\eta_a H = H\eta_a$;

(c) 与反射可反交换, 即 $H\tilde{f} = -\widetilde{Hf}$.

下面的结果说明性质 (a), (b), (c) 完全刻画了 $L^2(\mathbb{R})$ 上的 Hilbert 变换.

定理 5.1.7 设 T 为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子. 那么 T 满足性质 (a)(b) 和 (c) 的充分必要条件为: 存在常数 c 使得在 $L^2(\mathbb{R})$ 上 $T=cH$.

证明 仅证必要性. 因 T 为 $L^2(\mathbb{R})$ 上有界的线性算子且与平移 τ_h 可交换, 由定理 3.3.4, 当 T 限制在 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 上时, 必存在 $u\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, 使得对一切 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, $T\varphi = u*\varphi$, 且

$$\widehat{T\varphi}(\xi) = (u*\varphi)^\wedge(\xi) = b(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \qquad \forall\xi\in\mathbb{R}, \tag{5.1.11}$$

其中 $b\in L^\infty(\mathbb{R})$. 由于 T 与伸缩可交换, 应用 $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ 中 Fourier 变换的性质以及伸缩的定义, 那么 (5.1.11) 说明 b 为零阶齐次函数, 即对 $\forall\xi\in\mathbb{R}$ 及 $a>0$, $b(a\xi)=b(\xi)$. 这样存在 c_1, c_2 使得

$$b(\xi) = \begin{cases} c_1, & \xi>0, \\ c_2, & \xi<0. \end{cases} \tag{5.1.12}$$

最后, 应用缓增广义函数反射的定义和性质 (c), 对 $\forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 有

$$b(\xi)\hat{\varphi}(-\xi) = -b(-\xi)\hat{\varphi}(-\xi),$$

因此 $b(-\xi)=-b(\xi)$. 由 (5.1.12) 式知 $c_2=-c_1$ 且 $b(\xi)=c_1\text{sgn}\,\xi$. 如取 $c=ic_1$, 那么 T 和 cH 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 上的限制相等. 由于 T 和 cH 均为 $L^2(\mathbb{R})$ 上的有界线性算子, 由稠密性即知 T 和 cH 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上相等. □

[注 5.1.2] 易知，作用在 $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ 上的一阶微分算子 D 满足： (a) $D\tau_h = \tau_h D$; (b') $D\eta_a = a\eta_a D$; (c) $D\tilde{\varphi} = -\widetilde{D\varphi}$. 如视恒等算子 I 为零阶微分算子 D_0, 那么 D_0 满足： (a) $D_0\tau_h = \tau_h D_0$; (b) $D_0\eta_a = \eta_a D_0$; (c') $D_0\tilde{\varphi} = \widetilde{D_0\varphi}$. 因此在此意义下，也称 Hilbert 变换为“零阶反对称微分算子”.

另一方面，通过取 Fourier 变换，可形式地记 $H = -D(-\Delta)^{-1/2}$, 这里 Δ 为一维的 Laplace 算子. 这样在 Fourier 变换的意义下, Hilbert 变换亦可视为微分算子.

§5.1.3 Calderón-Zygmund 分解

为研究 Hilbert 变换在 $L^p(\mathbb{R})\,(1 \leqslant p < \infty)$ 上的作用，我们先介绍 Calderón-Zygmund 分解，这是现代调和分析实方法中十分重要的工具之一.

定理 5.1.8 (Calderón-Zygmund 分解) 设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\lambda > 0$. 那么存在 $\mathbb{R}^n$ 中的方体列 $\{Q_j\}$, 其内部两两不交，及 $\mathbb{R}^n$ 上的函数 g 和 b, 使得

(i) $\mathbb{R}^n = F \cup \Omega,\ \ F \cap \Omega = \varnothing$, 这里 $\Omega = \cup_j Q_j$;

(ii) $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} |f(x)|\,dx \leqslant 2^n\lambda,\quad j = 1, 2, \cdots$

(iii) $|f(x)| \leqslant \lambda$ 对 a.e. $x \in F$;

(iv) $|\Omega| \leqslant \dfrac{1}{\lambda}\|f\|_1$;

(v) $f = g + b$;

(vi) $\|g\|_\infty \leqslant 2^n\lambda$ 且 $\|g\|_p^p \leqslant C\lambda^{p-1}\|f\|_1$ 对 $1 \leqslant p < \infty$;

(vii) $b(x) = 0,\ x \in F$, 且 $\int_{Q_j} b(x)\,dx = 0,\quad j = 1, 2, \cdots$

证明 我们可分解 $\mathbb{R}^n$ 成为内部两两不交的等边长的方体网. 因 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 只要边长足够大，便可使得对每个方体 Q

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|\,dx \leqslant \lambda.$$

令 Q' 是该网中任一固定的方体，我们分解 Q' 成 2^n 个相等子方体, 记 Q'' 为其中之一. 那么存在如下两种情况：

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} |f(x)|\,dx > \lambda.$$

$$\text{(b)}\quad \frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} |f(x)|\,dx \leqslant \lambda.$$

对于情况 (a), 有

$$\lambda < \frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} |f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2^{-n}|Q'|}\int_{Q'} |f(x)|\,dx \leqslant 2^n\lambda.$$

这样我们不再剖分 Q'', 并将 Q'' 归入方体列 $\{Q_j\}$ 中.

对情况 (b), 我们再分解 Q'' 成 2^n 个相等小方体. 对每个小方体, 如出现情况 (a) 便不再剖分并将其归入方体列 $\{Q_j\}$ 中, 否则作进一步剖分并重复上述程序. 这样得到的方体列 $\{Q_j\}$ 中所有方体均满足情况 (a). 记 $\Omega = \cup_j Q_j$ 及 $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, 应用 Lebesgue 微分定理 (定理 1.2.9) 得

$$|f(x)| = \lim_{\substack{Q \ni x \\ |Q| \to 0}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|\, dt \leqslant \lambda, \qquad \text{a.e.} \quad x \in F.$$

因此得到结论 (i)(ii) 和 (iii). 由 (ii)

$$|\Omega| = \sum_j |Q_j| \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_{\cup_j Q_j} |f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{\lambda} \|f\|_1.$$

此即为 (iv). 现定义函数 g 和 b 如下:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ \dfrac{1}{|Q_j|} \displaystyle\int_{Q_j} f(x)\, dx, & x \in Q_j,\ j = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

且

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x \in F, \\ f(x) - \dfrac{1}{|Q_j|} \displaystyle\int_{Q_j} f(x)\, dx, & x \in Q_j,\ j = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

因此 $f = g + b$, 且由 b 的定义知 (vii) 成立. 最后, 我们验证结论 (vi). 由 (ii) 及 (iii) 即得 $\|g\|_\infty \leqslant 2^n \lambda$. 对 $1 < p < \infty$, 应用 (ii) 及 (iii) 有

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &= \sum_j \int_{Q_j} |g(x)|^{p-1} |g(x)|\, dx + \int_F |f(x)|^{p-1} |f(x)|\, dx \\ &\leqslant \sum_j (2^n \lambda)^{p-1} \int_{Q_j} |g(x)|\, dx + \lambda^{p-1} \int_F |f(x)|\, dx \\ &\leqslant (2^n \lambda)^{p-1} \sum_j \int_{Q_j} |f(x)|\, dx + \lambda^{p-1} \int_F |f(x)|\, dx \\ &\leqslant C \lambda^{p-1} \|f\|_1. \end{aligned}$$

而 $p = 1$ 时结论 (vi) 是明显的. 这样得到了 Calderón-Zygmund 分解定理. □

[注 5.1.3] 从上面证明过程可知, Calderón-Zygmund 分解中方体列 $\{Q_j\}$ 亦可取为二进方体列 $\{Q_j\}$. 称方体 Q 为二进方体, 如对 $k, m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{Z}$ 有

$$Q = [2^k m_1, 2^k(m_1 + 1)) \times [2^k m_2, 2^k(m_2 + 1)) \times \cdots \times [2^k m_n, 2^k(m_n + 1)).$$

§5.1.4 Hilbert 变换的 L^p 理论

现在我们讨论 Hilbert 变换的 $L^p(\mathbb{R})\,(1\leqslant p<\infty)$ 有界性问题. 首先指出, 和 Hardy-Littlewood 极大算子一样, Hilbert 变换不是 $L^1(\mathbb{R})$ 到 $L^1(\mathbb{R})$ 有界的. 事实上, 取 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 对 $\varepsilon>0$,

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon f(x)&=\frac{1}{\pi}\int_{|x-t|>\varepsilon}\frac{f(t)}{x-t}dt\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\left\{\int_{x-A}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{x+A}\right\}\frac{dt}{(x-t)(1+t^2)}\\
&=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\left\{\int_{x-A}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{x+A}\right\}\left(\frac{1}{x-t}\frac{1}{1+x^2}\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2(x-i)(1+it)}+\frac{1}{2(x+i)(1-it)}\right)dt.
\end{aligned}
$$

由于积分

$$
\left\{\int_{x-A}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{x+A}\right\}\frac{dt}{x-t}=0,
$$

因此

$$
\begin{aligned}
H_\varepsilon f(x)&=\frac{1}{2\pi(x-i)}\lim_{A\to\infty}\left\{\int_{x-A}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{x+A}\right\}\frac{dt}{1+it}\\
&\quad+\frac{1}{2\pi(x+i)}\lim_{A\to\infty}\left\{\int_{x-A}^{x-\varepsilon}+\int_{x+\varepsilon}^{x+A}\right\}\frac{dt}{1-it}\\
&=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{i}{x-i}\log\left(-\frac{x+\varepsilon-i}{x-\varepsilon-i}\right)+\frac{i}{x+i}\log\left(-\frac{x-\varepsilon+i}{x+\varepsilon+i}\right)\right\},
\end{aligned}
$$

上面两个对数函数均取主值. 注意到当 $0<\varepsilon<1$ 时 $-\frac{x+\varepsilon-i}{x-\varepsilon-i}$ 和 $-\frac{x-\varepsilon+i}{x+\varepsilon+i}$ 的实部和虚部均为负数, 因此

$$
Hf(x)=\lim_{\varepsilon\to0}H_\varepsilon f(x)=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{x-i}\cdot(-i\pi)+\frac{i}{x+i}\cdot(-i\pi)\right)=\frac{x}{1+x^2}.
$$

显然 $Hf\notin L^1(\mathbb{R})$.

[注 5.1.4] 由于 Hilbert 变换与平移, 伸缩均可交换, 因此运用上面的例子, 还可说明 $\mathbb{R}^2_+$ 中的 Poisson 核的 Hilbert 变换为共轭 Poisson 核, 即对任意的 $y>0$ 及 $t\in\mathbb{R}$, $(HP_y(\cdot-t))(x)=Q_y(x-t)$.

定理 5.1.9 (a) Hilbert 变换 H 是弱 $(1,1)$ 型算子;

(b) 对 $1<p<\infty$, Hilbert 变换 H 是 (p,p) 型算子.

证明 首先运用 Calderón-Zygmund 分解证明结论 (a). 不妨设 $f\geqslant 0$, 对任意给定的 $\lambda>0$, 有

$$|\{x\in\mathbb{R}:\ |Hf(x)|>\lambda\}|\leqslant|\{x\in\mathbb{R}:\ |Hg(x)|>\lambda/2\}| \\ +|\{x\in\mathbb{R}:\ |Hb(x)|>\lambda/2\}|,$$

其中 g, b 由 f 在 λ 处的 Calderón-Zygmund 分解所确定. 由 Hilbert 变换的 $L^2(\mathbb{R})$ 有界性及定理 5.1.8(vi) 得

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}:\ |Hg(x)|>\lambda/2\}|&\leqslant\frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}}|Hg(x)|^2dx\\&=\frac{4}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^2dx\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1.\end{aligned}$$

记 I_j^* 为 I_j 的同心二倍扩张, 这里 $\{I_j\}$ 为 f 在 λ 处的 Calderón-Zygmund 分解所确定的 $\mathbb{R}$ 中的区间列. 令 $\Omega^*=\cup_j I_j^*$, 那么由定理 5.1.8(iv), $|\Omega^*|\leqslant 2|\Omega|\leqslant\frac{2}{\lambda}\|f\|_1$. 这样

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}:\ |Hb(x)|>\lambda/2\}|&\leqslant|\Omega^*|+|\{x\notin\Omega^*:\ |Hb(x)|>\lambda/2\}|\\&\leqslant\frac{2}{\lambda}\|f\|_1+\frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}|Hb(x)|dx.\end{aligned}$$

现记

$$b_j(x)=\left(f(x)-\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}f(x)\,dx\right)\chi_{I_j}(x),\ j=1,2,\cdots.$$

如果 $\sum_j|Hb_j(x)|$ 为有限和, 那么 $|Hb(x)|\leqslant\sum_j|Hb_j(x)|$, a.e.. 否则, 注意到在 L^2 的意义下, $\sum_j b_j$ 和 $\sum_j Hb_j$ 分别收敛到 b 和 Hb, 故仍有 $|Hb(x)|\leqslant\sum_j|Hb_j(x)|$, a.e.. 记 I_j 的中心为 x_j, 则当 $t\in I_j$ 及 $x\notin I_j^*$ 时, $|t-x_j|\leqslant|I_j|/2$ 且 $|x-t|\geqslant|x-x_j|/2$. 由于 $\int b_j(x)dx=0$, 我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}|Hb_j(x)|dx&=\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\left|\int_{I_j}\frac{b_j(t)}{x-t}dt\right|dx\\&=\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\left|\int_{I_j}b_j(t)\left(\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x-x_j}\right)dt\right|dx\\&\leqslant\int_{I_j}|b_j(t)|\left(\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\frac{|t-x_j|}{|x-t||x-x_j|}dx\right)dt\\&\leqslant\int_{I_j}|b_j(t)|\left(\int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*}\frac{|I_j|}{|x-x_j|^2}dx\right)dt.\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*}|Hb(x)|dx \leqslant \sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus I^*}|Hb_j(x)|dx \leqslant 2\sum_j \int_{I_j}|b_j(t)|dt \leqslant 4\|f\|_1.$$

从而证明了 H 是弱 $(1,1)$ 型算子.

由结论 (a) 和定理 5.1.6 (a), 并应用 Marcinkiewicz 算子内插定理（定理 1.4.2) 知，对 $1<p<2$, Hilbert 变换 H 是 (p,p) 型算子. 再由定理 3.3.6，对 $2<p<\infty$, H 仍是 (p,p) 型算子. 从而 (b) 成立. □

[注 5.1.5] Hilbert 变换为弱 $(1,1)$ 型算子的结论首先由前苏联著名数学家 Kolmogolov 在 1925 年运用复分析方法证明的. 下面是已简化了的复方法证明.

设 $f\in L^1(\mathbb{R})$, 不妨设 $f\geqslant 0$. 对 $z=x+iy$, $y>0$, 令

$$F(z)=(P_y*f)(x)+i(Q_y*f)(x),$$

这里 P_y*f 为 f 的 Poisson 积分且 Q_y*f 为 f 的共轭 Poisson 积分. 那么当 $s>0$ 时，$w(x,y)=\log|1+sF(z)|$ 在 $\mathbb{R}^2_+$ 内调和，且在每个本征子空间 $\mathbb{R}^2_{+,y_0}=:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2_+ : y\geqslant y_0>0\}$ 上有界. 由 (4.2.3), 只要 $0<\eta<y$, 有

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} w(\xi,\eta)P_{y-\eta}(x-\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\log|1+sF(\xi+i\eta)|d\xi. \end{aligned}$$

由定理 5.1.4 和 Fatou 引理,

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta\to 0}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y-\eta}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\log|1+sF(\xi+i\eta)|d\xi \\ &\geqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y}{(x-\xi)^2+y^2}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(sHf(\xi))^2}d\xi. \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

由 (5.1.13) 得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{y^2}{(x-\xi)^2+y^2}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(sHf(\xi))^2}d\xi \\ &\leqslant y\log|1+sF(x+iy)| \\ &\leqslant y\log(1+s|F(x+iy)|) \\ &\leqslant ys|F(x+iy)|. \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

另一方面，易知

$$\lim_{y\to\infty}\pi yF(x+iy)=\int_{\mathbb{R}}f(\xi)d\xi=\|f\|_1.$$

这样在 (5.1.14) 的两边令 $y\to\infty$, 有

$$\int_{\mathbb{R}}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(sHf(\xi))^2}d\xi\leqslant s\|f\|_1.$$

对 $\alpha>0$, 记 $E_\alpha=\{\xi\in\mathbb{R}:Hf(\xi)>\alpha\}$. 由上式

$$\begin{aligned}(\log s\alpha)|E_\alpha|&\leqslant\int_{E_\alpha}\log|sHf(\xi)|d\xi\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}}\log\sqrt{(1+sf(\xi))^2+(sHf(\xi))^2}d\xi\leqslant s\|f\|_1.\end{aligned}$$

现取 $s=e/\alpha$, 便得到 Hilbert 变换的弱 $(1,1)$ 有界性. □

由 Hilbert 变换的 L^p 有界性, 可说明 Hilbert 变换的反演公式(5.1.10) 对 L^p 函数仍然成立.

推论 5.1.10 设 $1<p<\infty$. 如 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 且 $g\in L^{p'}(\mathbb{R})$, 那么

(a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}Hf(x)g(x)dx=-\int_{\mathbb{R}}f(x)Hg(x)dx$;

(b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}Hf(x)\overline{g(x)}dx=-\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{Hg(x)}dx$;

(c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}Hf(x)\overline{Hg(x)}dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx$;

(d) $H(Hf)(x)=-f(x),\quad$ a.e. $x\in\mathbb{R}$.

证明 首先设 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 且 $g\in L^2(\mathbb{R})\cap L^{p'}(\mathbb{R})$. 取 $\{f_k\}\subset L^2(\mathbb{R})\cap L^p(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0$. 那么由 $H^t=-H$ (见定理 5.1.6 (d)),

$$\int_{\mathbb{R}}Hf_k(x)g(x)dx=-\int_{\mathbb{R}}f_k(x)Hg(x)dx,\qquad\forall\ k.$$

这样由上式及 Hilbert 变换的 L^p 有界性知

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}}Hf\cdot gdx+\int_{\mathbb{R}}f\cdot Hgdx\right|\\&\leqslant\left|\int_{\mathbb{R}}H(f-f_k)\cdot gdx\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}Hf_k\cdot gdx+\int_{\mathbb{R}}f_k\cdot Hgdx\right|\\&\quad+\left|\int_{\mathbb{R}}f_k\cdot Hgdx-\int_{\mathbb{R}}f\cdot Hgdx\right|\\&\leqslant\|H(f-f_k)\|_p\|g\|_{p'}+\|f-f_k\|_p\|Hg\|_{p'}\to0.\quad(k\to\infty)\end{aligned}\tag{5.1.15}$$

对于 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 且 $g\in L^{p'}(\mathbb{R})$, 取 $\{g_k\}\subset L^2(\mathbb{R})\cap L^{p'}(\mathbb{R})$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k-g\|_{p'}=0$. 运用 (5.1.15) 式及同样的思想便可得结论 (a). 同样的方法可用于 (b) 和 (c) 的

证明. 现说明 (d). 在结论 (a) 中用 Hf 代替 f, 用 $\bar{g}$ 代替 g 并应用结论 (c) 有

$$\int_{\mathbb{R}} H(Hf)(x)\overline{g(x)}dx = -\int_{\mathbb{R}} Hf(x)\overline{Hg(x)}dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

这表明, 对任意的 $g \in L^{p'}(\mathbb{R})$ 都有

$$\int_{\mathbb{R}} [H(Hf)(x) + f(x)]\overline{g(x)}dx = 0. \tag{5.1.16}$$

现取

$$\overline{g(x)} = \operatorname{sgn}[H(Hf)(x) + f(x)]|H(Hf)(x) + f(x)|^{p-1},$$

那么由 (5.1.16) 得

$$\int_{\mathbb{R}} |H(Hf)(x) + f(x)|^p dx = 0.$$

从而 $H(Hf)(x) = -f(x), \quad \text{a.e. } \ x \in \mathbb{R}.$ □

下面的引理揭示了 Hilbert 变换, Poisson 积分和共轭 Poisson 积分之间的重要关系.

引理 5.1.11 设 $1 < p < \infty$. 对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R})$ 及 $y > 0$ 有

$$Q_y * f(x) = P_y * Hf(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5.1.17}$$

其中 P_y 和 Q_y 分别为 $\mathbb{R}^2_+$ 中的 Poisson 核和共轭 Poisson 核.

证明 注意到对任意的 $y > 0$, $P_y, Q_y \in L^{p'}(\mathbb{R})\,(1 < p' < \infty)$, 因此由定理 5.1.9(b), $Q_y * f, P_y * Hf$ 均有意义. 下面我们将分别运用 Hilbert 变换和 Fourier 变换的性质给出 (5.1.17) 式两种证明方法.

(i) 应用推论 5.1.10(a) 及 [注 5.1.4] 有,

$$\begin{aligned} P_y * Hf(x) &= \int_{\mathbb{R}} Hf(t)P_y(x-t)dt \\ &= -\int_{\mathbb{R}} f(t)[H(P_y(x-\cdot))](t)dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t)Q_y(x-t)dt = Q_y * f(x). \end{aligned}$$

(ii) 只需对 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ 证明 (5.1.17) 式. 先说明如下事实: 对 $y > 0$, 有

$$(-i\operatorname{sgn}(\cdot)e^{-2\pi y|\cdot|})^{\vee}(x) = \frac{1}{\pi}\frac{x}{x^2+y^2}. \tag{5.1.18}$$

事实上，对 $y>0$，记 $q(t)=(-i\operatorname{sgn}t)e^{-2\pi y|t|}$，那么 $q\in\mathscr{S}'(\mathbb{R})$. 任取 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\check{q}(\varphi)=q(\check{\varphi})&=-i\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}t\,e^{-2\pi y|t|}\hat{\varphi}(-t)dt\\&=\int_{\mathbb{R}}\varphi(\xi)\int_0^\infty(-i)(2i)e^{-2\pi yt}\sin(2\pi t\xi)dtd\xi.\end{aligned}$$

不难计算

$$2\int_0^\infty e^{-2\pi yt}\sin(2\pi t\xi)dt=\frac{1}{\pi}\frac{\xi}{\xi^2+y^2}.$$

从而 (5.1.18) 成立. 这样

$$(Q_y*f)^\wedge(\xi)=(-i\operatorname{sgn}\xi)e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi). \tag{5.1.19}$$

现在 (5.1.17) 两边取 Fourier 变换，并应用 [注 2.1.4] 和 (5.1.19) 得

$$(P_y*Hf)^\wedge(\xi)=e^{-2\pi y|\xi|}\widehat{Hf}(\xi)=(-i\operatorname{sgn}\xi)e^{-2\pi y|\xi|}\hat{f}(\xi)=(Q_y*f)^\wedge(\xi).$$

从而 (5.1.17) 成立. □

[注 5.1.6] 应用推论 5.1.10 及 [注 5.1.4] 可进一步说明：对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R})\,(1<p<\infty)$ 及 $y>0$ 有 $Q_y*Hf(x)=-P_y*f(x)$. 此事实可作为引理 5.1.11 的补充.

应用引理 5.1.11，可以给出极大 Hilbert 变换 H^* 的 L^p 有界性的简单证明. 设 $f\in L^p(\mathbb{R})$ $(1\leqslant p<\infty)$. 那么 f 的极大 Hilbert 变换 H^* 定义为：

$$H^*f(x)=\sup_{\varepsilon>0}|H_\varepsilon f(x)|.$$

定理 5.1.12 极大 Hilbert 变换 H^* 亦是弱 $(1,1)$ 型和 $(p,p)\,(1<p<\infty)$ 型算子.

证明 先说明 H^* 是 $(p,p)\,(1<p<\infty)$ 型算子. 对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R})$ 及 $\varepsilon>0$，由 (5.1.17), (1.3.9) 及 (5.1.5)

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon f(x)|&\leqslant|Q_\varepsilon*f(x)|+|Q_\varepsilon*f(x)-H_\varepsilon f(x)|\\&\leqslant\sup_{\varepsilon>0}|P_\varepsilon*Hf(x)|+\sup_{\varepsilon>0}|Q_\varepsilon*f(x)-H_\varepsilon f(x)|\\&\leqslant CM(Hf)(x)+5Mf(x),\end{aligned}$$

此处 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子. 注意到上式右边已与 ε 无关，因此

$$H^*f(x)\leqslant CM(Hf)(x)+5Mf(x),\qquad\text{a.e. }x\in\mathbb{R}. \tag{5.1.20}$$

这样，H^* 为 $(p,p)\,(1<p<\infty)$ 有界的结论便是应用 (5.1.20), (1.2.15) 和定理 5.1.9(b) 的结果.

现证明 H^* 是弱 $(1,1)$ 型的. 仍不妨设 $f\geqslant 0$, 并采用定理 5.1.9 证明中引进的记号. 对任意的 $\lambda>0$, 由 f 在 λ 处的 Calderón-Zygmund 分解, 写

$$f=g+b=g+\sum_j b_j.$$

由证明 H 为弱 $(1,1)$ 型算子的思想可知（注意上面已证明 H^* 为 $(2,2)$ 型算子）

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*f(x)>\lambda\}|&\leqslant|\{x\in\mathbb{R}:\ H^*g(x)>\lambda/2\}|+|\Omega^*|\\&\quad+|\{x\notin\Omega^*:\ H^*b(x)>\lambda/2\}|\\&\leqslant\frac{C}{\lambda}\|f\|_1+|\{x\notin\Omega^*:\ H^*b(x)>\lambda/2\}|.\end{aligned}$$

对 $x\notin\Omega^*$, $\varepsilon>0$ 及 I_j, 下面三种情况之一必然出现：

(a) $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=I_j$;

(b) $(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap I_j=\varnothing$;

(c) $x-\varepsilon\in I_j$ 或 $x+\varepsilon\in I_j$.

对于情况 (a), $H_\varepsilon b_j(x)=0$. 在情况 (b) 时, $H_\varepsilon b_j(x)=Hb_j(x)$. 如记 I_j 的中心为 x_j, 那么

$$|H_\varepsilon b_j(x)|\leqslant\int_{I_j}\left|\frac{1}{x-t}-\frac{1}{x-x_j}\right||b_j(t)|dt\leqslant\frac{|I_j|}{|x-x_j|^2}\|b_j\|_1.$$

在情况 (c) 下, 由 $x\notin\Omega^*$ 知 $I_j\subset(x-3\varepsilon,x+3\varepsilon)$, 且对所有 $t\in I_j$, 有 $|x-t|>\varepsilon/3$. 因此

$$|H_\varepsilon b_j(x)|\leqslant\int_{I_j}\frac{|b_j(t)|}{|x-t|}dt\leqslant\frac{3}{\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon}|b_j(t)|dt.$$

综上，我们有

$$\begin{aligned}|H_\varepsilon b(x)|&\leqslant\sum_j\frac{|I_j|}{|x-x_j|^2}\|b_j\|_1+\frac{3}{\varepsilon}\int_{x-3\varepsilon}^{x+3\varepsilon}|b(t)|dt\\&\leqslant\sum_j\frac{|I_j|}{|x-x_j|^2}\|b_j\|_1+CMb(x).\end{aligned}$$

这样

$$
\begin{aligned}
|\{x \notin \Omega^*:\ H^*b(x) > \lambda/2\}| &\leqslant \left|\left\{x \notin \Omega^*:\ \sum_j \frac{|I_j|}{|x-x_j|^2}\|b_j\|_1 > \lambda/4\right\}\right| \\
&\quad + |\{x \in \mathbb{R}:\ Mb(x) > \lambda/4C\}| \\
&\leqslant \frac{4}{\lambda}\sum_j \|b_j\|_1 \int_{\mathbb{R}\setminus I_j^*} \frac{|I_j|}{|x-x_j|^2}dx + \frac{C'}{\lambda}\|b\|_1 \\
&\leqslant \frac{C''}{\lambda}\|b\|_1.
\end{aligned}
$$

由此得出 H^* 是弱 $(1,1)$ 型的. □

[注 5.1.7] 不等式 (5.1.20) 称为 Cotlar 不等式.

应用引理 5.1.11, 推论 1.3.4 和定理 1.3.8(b) 可直接得出共轭 Poisson 积分在 $\mathbb{R}$ 上的 L^p 极限.

定理 5.1.13 设 $1 < p < \infty$ 且 $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(a) 对 $\forall y > 0$, $Q_y * f \in L^p(\mathbb{R})$, 且 $\|Q_y * f\|_p \leqslant C\|f\|_p$, 这里 $C = C(p)$ 与 y 和 f 无关;

(b) $\lim\limits_{y\to 0}\|Q_y * f - Hf\|_p = 0$.

§5.2 Riesz 变换

§5.2.1 Riesz 变换的 L^2 理论

我们现在研究 Hilbert 变换的高维形式. 回顾 Hilbert 变换的核为 $k(x) = \text{p.v.}\frac{1}{\pi x}$, 那么当 $n=1$ 时, 可写 $\frac{1}{x} = \frac{x}{|x|^{n+1}}$. 另一方面, 注意到 π 可视为 $\mathbb{R}^2$ 中单位园 $\mathbb{S}^1$ 的长度 ω_1 的一半. 因此, Hilbert 变换的 n 维 $(n \geqslant 2)$ 形式的积分核应具有以下形式:

$$
K_j(x) = \text{p.v. } c_n \frac{x_j}{|x|^{n+1}}, \qquad j = 1, 2, \cdots, n,
$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 且 $c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 中 Poisson 核 $P(x)$ 中的常数 (见定义 1.3.2), 而 c_n^{-1} 恰好为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中单位球面 $\mathbb{S}^n$ 的面积 ω_n 的一半. 下面将看到,

以 $K_j\,(j=1,2,\cdots,n)$ 为核的积分算子确实是 Hilbert 变换的高维表现. 记以 K_j 为核的积分算子为 R_j，并称其为第 j 个 Riesz 变换，其定义为：对 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$R_jf(x)=K_j*f(x)=\text{p.v. } c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{x_j-y_j}{|x-y|^{n+1}}f(y)dy,\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{5.2.1}$$

很明显，$\frac{x_j}{|x|^{n+1}}\notin\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 下面的引理告诉我们，$K_j$ 为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的主值广义函数.

引理 5.2.1 对于 $j=1,2,\cdots,n$, K_j 为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的主值广义函数, 且 $\widehat{K_j}(\xi)=-i\frac{\xi_j}{|\xi|}$.

证明 固定 $1\leqslant j\leqslant n$ 及任意的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
|L_{K_j}(\varphi)|&=c_n\left|\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant1}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy+\int_{|y|>1}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}\varphi(y)dy\right|\\
&\leqslant c_n\int_{|y|\leqslant1}\left|\frac{y_j[\varphi(y)-\varphi(0)]}{|y|^{n+1}}\right|dy+\int_{|y|>1}\left|\frac{y_j\varphi(y)}{|y|^{n+1}}\right|dy\\
&\leqslant C'\|\nabla\varphi\|_\infty+C''\sum_{|\alpha|\leqslant1}\|t^\alpha\varphi(t)\|_\infty\leqslant C.
\end{aligned}$$

因此 K_j 为 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的主值广义函数. 现任取 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\widehat{K_j}(\varphi)&=K_j(\hat{\varphi})\\
&=c_n\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant\frac1\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx\frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}d\xi\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left(c_n\int_{\varepsilon\leqslant|\xi|\leqslant\frac1\varepsilon}e^{-2\pi ix\cdot\xi}\frac{\xi_j}{|\xi|^{n+1}}d\xi\right)dx\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left(c_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}e^{-2\pi irx\cdot\theta}\frac{dr}{r}\theta_jd\theta\right)dx\\
&=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left(-ic_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_\varepsilon^{1/\varepsilon}\sin(2\pi irx\cdot\theta)\frac{dr}{r}\theta_jd\theta\right)dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\left(-\frac{i\pi c_n}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\theta_j\text{sgn}(x\cdot\theta)d\theta\right)dx.
\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

在上面最后一步运用了 Lebesgue 控制收敛定理. 现固定 $x\in\mathbb{R}^n\,(x\neq0)$, 选取 $\mathbb{R}^n$ 中的标准正交基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 使得 $\alpha_j=\dfrac{x}{|x|}$. 那么

$$\theta_j=(\theta\cdot\mathbf{e_j})=\sum_{k=1}^n(\alpha_k\cdot\theta)(\mathbf{e_j}\cdot\alpha_k),$$

这里 $\mathbf{e_j}=(0,\cdots,1,\cdots,0)$, 其第 j 个分量为 1 其余分量为零. 此外, 容易看出 $\mathrm{sgn}(x\cdot\theta)=\mathrm{sgn}(\alpha_j\cdot\theta)$. 又因 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为标准正交基, 故通过一正交变换可知对 $k\neq j$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(\theta\cdot\alpha_k)\mathrm{sgn}(\alpha_j\cdot\theta)d\theta=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\theta_k\mathrm{sgn}\ \theta_j d\theta=0.$$

这样

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mathrm{sgn}(x\cdot\theta)\theta_j d\theta &=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbf{e_j}\cdot\alpha_j)(\alpha_j\cdot\theta)\mathrm{sgn}(\alpha_j\cdot\theta)d\theta\\ &=\frac{x_j}{|x|}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|(\alpha_j\cdot\theta)|d\theta.\end{aligned}\tag{5.2.3}$$

取 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转 $\mathscr{O}$, 使得 $\mathscr{O}(\alpha_j)=\mathbf{e_j}$. 同时运用 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中单位球面 $\mathbb{S}^{n-2}$ 面积 ω_{n-2} 的表示得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|(\alpha_j\cdot\theta)|d\theta=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|(\mathbf{e_j}\cdot\theta)|d\theta&=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\theta_j|d\theta\\ &=\int_{-1}^{1}|s|\int_{\sqrt{1-s^2}\mathbb{S}^{n-2}}d\phi\frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\\ &=\omega_{n-2}\int_{-1}^{1}|s|(1-s^2)^{(n-3)/2}ds\\ &=\omega_{n-2}\int_0^1 u^{(n-3)/2}du\\ &=\frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}=\frac{2}{\pi c_n}.\end{aligned}$$

结合 (5.2.2) 和 (5.2.3), 我们证明了 $\widehat{K_j}(\xi)=-i\dfrac{\xi_j}{|\xi|}$, $j=1,2,\cdots,n$. □

[注 5.2.1] 注意到当 $n=1$ 且 $\xi\neq 0$ 时, $\frac{\xi_j}{|\xi|}=\mathrm{sgn}\ \xi$. 因此从积分核的 Fourier 变换的角度来看, Riesz 变换确实是 Hilbert 变换的 n 维形式.

[注 5.2.2] 在 [注 5.1.2] 中, 我们说明了 Hilbert 变换可看作微分算子. 同样地, 在 Fourier 变换的意义下, Riesz 变换也可表达为一类微分算子. 事实上, 由 Laplace 算子 Δ 与 Fourier 变换的关系及引理 5.2.1, 可形式地记 $\mathbf{R}=-\nabla(-\Delta)^{-1/2}$, 其中 $\mathbf{R}=(R_1,\cdots,R_n)$ 且 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

定理 5.2.2 对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

(a) $\|R_jf\|_2\leqslant\|f\|_2$, $j=1,2,\cdots,n$;

(b) $\sum_{j=1}^n R_j^2f(x)=-f(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$;

(c) $R_j(R_kf)(x)=R_k(R_jf)(x)$, a.e. $x\in\mathbb{R}^n$, $j,k=1,2,\cdots,n$;

(d) $\sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_2^2 = \|f\|_2^2$.

证明 由引理 5.2.1, 对 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\widehat{R_j\varphi}(\xi) = -i\frac{\xi_j}{|\xi|} \cdot \hat{\varphi}(\xi), \quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{5.2.4}$$

由 (5.2.4), Plancherel 定理和定理 3.3.4 可得结论 (a). 应用 Fourier 变换得

$$\left(\sum_{j=1}^{n} R_j^2 f\right)^{\wedge}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (R_j(R_j f))^{\wedge}(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(-i\xi_j)^2}{|\xi|^2} \hat{f}(\xi) = -\hat{f}(\xi).$$

这样得到结论 (b), 同样可得 (c). 最后, 再次运用 Plancherel 定理可得到 (d). □

由 Riesz 变换的定义 (5.2.1), 不难验证, Riesz 变换 R_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上满足以下性质:

(a) 与平移 τ_h 可交换, 即 $\tau_h R_j = R_j \tau_h$;

(b) 与伸缩 η_a $(a > 0)$可交换, 即 $\eta_a R_j = R_j \eta_a$;

(c) 设 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上任一旋转, 其矩阵为 $O = (a_{jk})$. 对 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数 f, 定义算子 $\mathscr{O}: (\mathscr{O}f)(x) = f(\mathcal{O}x)$. 那么

$$\mathscr{O}^{-1} R_j \mathscr{O} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} R_k.$$

下面的结果推广了定理 5.1.7, 它表明上述性质 (a) (b)(c) 完全刻画了 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的 Riesz 变换.

定理 5.2.3 设 $\{T_j\}_{j=1}^n$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ $(n \geqslant 3)$ 上 n 个有界线性算子. 如 $\{T_j\}$ 满足性质 (a), (b) 和 (c), 那么存在常数 c 使得在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 $T_j = cR_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

证明 因 T_j 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上有界且与平移可交换, 由定理 3.3.4, 当 T_j 限制在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上时, 必存在 $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 使得对一切 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $T_j\varphi = u * \varphi$, 且

$$\widehat{T_j\varphi}(\xi) = (u * \varphi)^{\wedge}(\xi) = b_j(\xi)\hat{\varphi}(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2.5}$$

其中 $b_j \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. 又由于 T_j 与伸缩可交换, 应用 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换性质及 (5.2.5), 知 b_j 为零阶齐次函数, 即对 $1 \leqslant j \leqslant n$,

$$b_j(a\xi) = b_j(\xi), \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ 及 } a > 0. \tag{5.2.6}$$

设 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 上任一旋转, 其矩阵记为 (a_{jk}), 那么由性质 (c) 及 (5.2.5), 对任意的 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$(\mathscr{O}^{-1} T_j \mathscr{O}\varphi)^{\wedge}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (T_k\varphi)^{\wedge}(\xi) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} b_k(\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

另一方面，由于算子 $\mathscr{O}^{-1}$ 与 Fourier 变换可交换，故

$$(\mathscr{O}^{-1}T_j\mathscr{O}\varphi)^\wedge(\xi)=\mathscr{O}^{-1}(T_j\mathscr{O}\varphi)^\wedge(\xi)=\mathscr{O}^{-1}[b_j(\xi)\hat{\varphi}(\mathcal{O}\xi)]=b_j(\mathcal{O}^{-1}\xi)\hat{\varphi}(\xi).$$

如选取 $\varphi(x)=e^{-\pi|x|^2}$，那么以上两式说明，对任一旋转 $\mathcal{O}$（矩阵为 (a_{jk})）及任意的 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有，

$$b_j(\mathcal{O}^{-1}\xi)=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}b_k(\xi),\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{5.2.7}$$

现取 $\mathbf{e_1}=(1,0,\cdots,0)^\top$，则 $b_j(\mathbf{e_1})=0\,(2\leqslant j\leqslant n)$. 事实上，设 ρ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任一满足 $\rho(\mathbf{e_1})=\mathbf{e_1}$ 的旋转. 如 ρ 的矩阵为 (ρ_{jk})，那么 $\rho_{11}=1$ 且 $\rho_{21}=\cdots=\rho_{n1}=\rho_{12}=\cdots=\rho_{1n}=0$. 由 (5.2.7)，对 $2\leqslant j\leqslant n$

$$b_j(\mathbf{e_1})=b_j(\rho^{-1}\mathbf{e_1})=\sum_{k=1}^{n}\rho_{kj}b_k(\mathbf{e_1})=\sum_{k=2}^{n}\rho_{kj}b_k(\mathbf{e_1}).$$

上式表明，向量 $(b_2(\mathbf{e_1}),\cdots,b_n(\mathbf{e_1}))^\top$ 在 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中任一旋转下不变，故其必为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中的零向量. 另一方面，注意到 (5.2.7) 等价于对任一旋转 $\mathcal{O}$（矩阵为 (a_{jk})）及任意的 $\xi\in\mathbb{R}^n$ 有，

$$b_j(\mathcal{O}\xi)=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_k(\xi),\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{5.2.8}$$

记 $c_0=b_1(\mathbf{e_1})$，由 (5.2.8)，对任一旋转 $\mathcal{O}$（矩阵为 (a_{jk})）

$$b_j(\mathcal{O}\mathbf{e_1})=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_k(\mathbf{e_1})=a_{j1}b_1(\mathbf{e_1})=c_0a_{j1},\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{5.2.9}$$

现任取 $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$, 则存在 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转 σ, 其矩阵为 (σ_{jk}), 使得 $\sigma(\mathbf{e_1})=\dfrac{x}{|x|}$. 等价地，

$$\sigma_{j1}=\frac{x_j}{|x|},\qquad 1\leqslant j\leqslant n.$$

注意到 b_j 均为零阶齐次函数（见 (5.2.6)），应用 (5.2.9) 和上式得到

$$b_j(x)=b_j(\frac{x}{|x|})=b_j(\sigma(\mathbf{e_1}))=c_0\sigma_{j1}=c_0\frac{x_j}{|x|},\qquad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{5.2.10}$$

对 $1\leqslant j\leqslant n$ 及 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 由 (5.2.10), (5.2.5) 和 (5.2.4)

$$\widehat{T_j\varphi}(\xi)=c_0\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{\varphi}(\xi)=ic_0\big(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\hat{\varphi}(\xi)\big)=ic_0\widehat{R_j\varphi}(\xi).$$

因此令 $c = ic_0$, 则在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上 $T_j = cR_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$. 由于 T_j, R_j 均为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上的有界线性算子, 由 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的稠密性即知定理的结论成立. □

[注 5.2.3] 上面的证明方法不适用于 $n=2$ 的情形. 然而有如下的结论, 它是定理 5.2.3 的一般化. 设 $\{T_j\}_{j=1}^n$ 为 $L^2(\mathbb{R}^n)\,(n \geqslant 2)$ 上 n 个有界线性算子. 如 $\{T_j\}$ 满足性质 (a) 和 (b), 以及 (c'): 对 $\mathbb{R}^n$ 上任一正交变换 $\mathscr{A}$, $\mathbf{T}(\mathscr{A}f) = \mathscr{A}^t(\mathbf{T}(f))$, 这里 $\mathbf{T} = (T_1, T_2, \cdots, T_n)^t$, $\mathscr{A}^t$ 为 $\mathscr{A}$ 的转置变换 (即为 $\mathscr{A}^{-1}$), 而 $(\mathscr{A}f)(x) = f(\mathscr{A}x)$. 那么存在常数 c 使得在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上 $T_j = cR_j$, $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

§5.2.2 旋转方法和 Riesz 变换的 L^p 理论

旋转方法是 Calderón 和 Zygmund 在 1956 年为研究一类带非光滑核的奇异积分算子的 L^p 有界性而引进的. 简言之, 其思想就是运用球坐标变换将 $\mathbb{R}^n\,(n \geqslant 2)$ 上的积分算子化为沿某方向相应的一维积分算子在球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的积分, 再应用已知的一维积分算子的 (p,p) 有界性导出原积分算子的 (p,p) 有界性. 下面我们给出旋转方法的原理, 并应用此方法给出 Riesz 变换的 L^p 有界性.

对任意的 $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$, 可记 $y = ry'$, 其中 $0 < r < \infty$ 且 $y' \in \mathbb{S}^{n-1}$. 令 $Tf(x) = K * f(x)$, 则

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(y) f(x-y) dy = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^\infty K(ry') f(x - ry') r^{n-1} dr dy'.$$

如 $K(ry') = \Omega(y')h(r)$, 那么

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') \int_0^\infty h(r) f(x-ry') r^{n-1} dr dy' \\ &:= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') T_{y'} f(x) dy'. \end{aligned}$$

现固定 $y' \in \mathbb{S}^{n-1}$, 令 Y 是通过原点且与 y' 正交的超平面. 这样对所有的 $x \in \mathbb{R}^n$, 存在 $s \in \mathbb{R}$ 及 $z \in Y$ 使得 $x = z + sy'$. 因此

$$T_{y'} f(x) = \int_0^\infty h(r) f[z + (s-r)y'] r^{n-1} dr := L(f_{z,y'})(s). \tag{5.2.11}$$

如果 L 是 $\mathbb{R}$ 上的 (p,p) $(1 \leqslant p < \infty)$ 型算子, 即存在 $C = C(p) > 0$, 使得对任意的 $g \in L^p(\mathbb{R})$ 有

$$\|L(g)\|_p^p \leqslant C \|g\|_p^p,$$

那么由 (5.2.11) 并应用 Fubini 定理

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|T_{y'}f(x)|^p\,dx&=\int_Y\int_{-\infty}^{\infty}|L(f_{z,y'})(s)|^p\,dsdz\\&\leqslant C\int_Y\int_{-\infty}^{\infty}|f(z+sy')|^p\,dsdz=C\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^pdx.\end{aligned}$$

很明显，这里常数 C 与 z,y' 及 f 均无关. 运用 Minkowski 不等式便有

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p&=\left\|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')T_{y'}f(\cdot)dy'\right\|_p\\&\leqslant\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|\cdot\|T_{y'}f\|_pdy'\leqslant C\|f\|_p\cdot\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|dy'.\end{aligned}$$

如果有

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|dy'<\infty,$$

那么由上面的讨论即知 T 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界的 $(1\leqslant p<\infty)$.

我们将上面的讨论归纳为下面的命题:

命题 5.2.4 (Calderón-Zygmund *旋转方法*) 设一维算子 T 在 $\mathbb{R}$ 上是 (p,p) 型的 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$, $T_{y'}$ 为 T 的方向算子. 那么对 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 算子

$$T_\Omega f(x)=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')T_{y'}f(x)dy'$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上也是 (p,p) 型的 $(1\leqslant p\leqslant\infty)$.

现给出几个重要的方向算子的定义.

定义 5.2.1 (*方向算子*)

(i) 方向Hardy-Littlewood 极大算子 $M_{y'}$:

$$M_{y'}f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r}|f(x-ty')|dt,\qquad f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ \ (1\leqslant p\leqslant\infty);$$

(ii) 方向Hilbert 变换 $H_{y'}$:

$$H_{y'}f(x)=\text{p.v.}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x-ty')}{t}dt,\qquad f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ \ (1\leqslant p<\infty);$$

(iii) 方向极大 Hilbert 变换 $H^*_{y'}$:

$$H^*_{y'}f(x)=\frac{1}{\pi}\sup_{\varepsilon>0}\left|\int_{|t|>\varepsilon}\frac{f(x-ty')}{t}dt\right|,\qquad f\in L^p(\mathbb{R}^n)\ \ (1\leqslant p<\infty).$$

首先我们运用旋转方法给出一类带粗糙核的极大算子的 L^p 有界性.

定理 5.2.5 设 Ω 为 $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\,(n\geqslant 2)$ 上的零阶齐次函数, 即

$$\Omega(\lambda x)=\Omega(x),\qquad \forall\lambda>0\ \text{及}\ x\neq 0. \tag{5.2.12}$$

如 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 那么对于 $1<p\leqslant\infty$, 如下定义的极大算子

$$M_\Omega f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^n}\int_{|y|\leqslant r}|\Omega(y)||f(x-y)|dy \tag{5.2.13}$$

是 (p,p) 型算子.

证明 事实上, 只要注意到

$$M_\Omega f(x)\leqslant C_n\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|M_{y'}f(x)dy'.$$

由 Hardy-Littlewood 极大算子的 L^p 有界性 (定理 1.2.7) 及命题 5.2.4 即知定理的结论成立. □

[注 5.2.4] 由 (5.2.13) 定义的算子 M_Ω 称为带粗糙核的极大算子, 这是因为其核函数 Ω 在单位球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上仅有尺寸条件而没有任何光滑性. M_Ω 在研究一类非光滑核奇异积分算子问题中有非常重要的作用. 然而至今仍不清楚, 当 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 时, 粗糙核极大算子 M_Ω 是否为弱 $(1,1)$ 型算子.

现回到 Riesz 变换的 L^p 有界性讨论.

定理 5.2.6 设 $1<p<\infty$ 且 $1\leqslant j\leqslant n$, 那么存在常数 $C>0$, 使得对任意的 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$\|R_jf\|_p\leqslant C\|f\|_p. \tag{5.2.14}$$

证明 先考虑 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的情形. 对 $\varepsilon>0$, 记

$$R_j^\varepsilon f(x)=c_n\int_{|y|>\varepsilon}\frac{y_j}{|y|^{n+1}}f(x-y)dy,\qquad j=1,2,\cdots,n.$$

由 (5.2.1), $R_jf(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}R_j^\varepsilon f(x)$. 运用球坐标变换得到,

$$R_jf(x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{c_n\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}y_j'H_{y'}^\varepsilon f(x)dy',$$

这里

$$H_{y'}^\varepsilon f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{|t|\geqslant\varepsilon}\frac{f(x-ty')}{t}dt,$$

称为截断方向 Hilbert 变换. 由 $H_{y'}^*$ 的 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1<p<\infty)$ 有界性 (定理 5.1.12) 知

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{y'}^* f(x)dy' < \infty, \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

运用 Lebesgue 控制收敛定理有

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} R_j^\varepsilon f(x) = \frac{c_n\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} y_j' H_{y'} f(x)dy', \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

因此，由定理 5.1.9 并运用旋转方法 (命题 5.2.4) 便知 (5.2.14) 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上成立. 由 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性知 R_j 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中有定义，且 (5.2.14) 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上仍然成立. □

定理 5.2.7 对 $1\leqslant j\leqslant n$，极大 Riesz 变换定义为 $R_j^* f(x) = \sup\limits_{\varepsilon>0}|R_j^\varepsilon f(x)|$. 那么当 $1<p<\infty$ 时，R_j^* 是 (p,p) 型算子. 从而对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ 及 $1\leqslant j\leqslant n$，

$$R_j f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} R_j^\varepsilon f(x), \qquad \text{a.e. } x\in\mathbb{R}^n.$$

证明 运用球坐标变换得到

$$|R_j^\varepsilon f(x)| = \left|\frac{c_n\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} y_j' H_{y'}^\varepsilon f(x)dy'\right| \leqslant \frac{c_n\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{y'}^* f(x)dy'.$$

因此

$$R_j^* f(x) \leqslant \frac{c_n\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} H_{y'}^* f(x)dy',$$

并由定理 5.1.12 及命题 5.2.4 即可知 R_j^* 是 (p,p) 型算子. 进而运用算子族的点态收敛性 (定理 1.2.8) 即可得后一结论. □

[注 5.2.5] Riesz 变换和极大 Riesz 变换均不是 $(1,1)$ 型算子. 然而，运用 Calderón-Zygmund 分解可证明，Riesz 变换和极大 Riesz 变换均是弱 $(1,1)$ 型算子 (亦可见推论 5.3.7 和推论 5.3.11). 需要说明的是，弱 $(1,1)$ 有界性不能通过旋转方法得到.

推论 5.2.8 设 $1<p<\infty$，则算子等式

$$\sum_{j=1}^n R_j^2 = -I \tag{5.2.15}$$

在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上成立, 这里 I 记 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的恒等算子.

证明 因 (5.2.15) 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上成立，由 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中稠密以及 Riesz 变换在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界便知 (5.2.15) 也在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上成立. □

推论 5.2.9 设 $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ 且 Δ 为 Laplace 算子，那么

(a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = -R_j R_k \Delta f$;

(b) 对 $1 < p < \infty$, $\left\| \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} \right\|_p \leqslant A_p \|\Delta f\|_p$.

证明 由 Fourier 变换

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)^{\wedge}(\xi) &= -4\pi^2 \xi_j \xi_k \hat{f}(\xi) \\ &= -\left(-i\frac{\xi_j}{|\xi|}\right)\left(-i\frac{\xi_k}{|\xi|}\right)(-4\pi^2|\xi|^2)\hat{f}(\xi) \\ &= -(R_j R_k \Delta f)^{\wedge}(\xi).\end{aligned}$$

因此得到 (a). 再应用 Riesz 变换的 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界性 (定理 5.2.6) 即知 (b) 成立. □

[注 5.2.6] 推论 5.2.9 实际上给出了 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 解的先验估计.

§5.2.3 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上共轭调和函数系的 Riesz 变换特征

由引理 5.1.11 知道，直线上一个 L^p 函数 f 的 Hilbert 变换 Hf 的 Poisson 积分 $P_y * Hf(x)$ 恰好是 f 的共轭 Poisson 积分，且 $P_y * Hf(x)$ 是 $P_y * f(x)$ 在 $\mathbb{R}_+^2$ 上的共轭调和函数. 下面我们给出上述结论在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上的推广. 为叙述方便，记 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的点为 (x, x_0) 或 (x, y), 这里 $x_0 > 0$ 或 $y > 0$, 且 $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

对 $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ 及 $j = 1, 2, \cdots, n$, 称

$$Q_y^{(j)}(x) = c_n \frac{x_j}{(y^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$$

为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的共轭 Poisson 核，其中 $c_n = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\pi^{(n+1)/2}}$.

我们有下面的结论：

定理 5.2.10 设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)\,(1 < p < \infty)$, R_j 为 Riesz 变换, P_y 为 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 中的 Poisson 核,. 那么对 $j = 1, 2, \cdots, n$,

(a) $Q_y^{(j)}(x) = R_j(P_y)(x)$;

(b) $Q_y^{(j)} * f(x) = P_y * R_j f(x)$;

(c) 在 f 的 Lebesgue 点 x 处，$\lim\limits_{y \to 0} Q_y^{(j)} * f(x) = R_j f(x)$;

(d) 如视相应于 $Q_y^{(j)}$ 的共轭 Poisson 积分 v_j的径向极大函数 $v_{j,+}^*$ 和非切向极大函数 $v_{j,\nabla,\alpha}^*$ 为 $L^p(\mathbb{R}^n)\,(1<p<\infty)$ 上的算子，那么 $v_{j,+}^*$ 和 $v_{j,\nabla,\alpha}^*$ 均是 (p,p) 型的.

证明 不难看出，对 $j=1,2,\cdots,n$, $Q_y^{(j)}$ 在 $\mathbb{R}_+^{n+1}$ 内调和且在每个本征子空间上有界. 对任意的 $\varepsilon>0$ 及 $(x,y)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$，由 (4.2.3)

$$\frac{x_j}{((y+\varepsilon)^2+|x|^2)^{(n+1)/2}}=c_n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t_j}{(\varepsilon^2+|t|^2)^{(n+1)/2}}\frac{y}{(y^2+|x-t|^2)^{(n+1)/2}}dt.$$

由 Poisson 核的可积性及 Lebesgue 控制收敛定理得到结论 (a). 再由 (a) 及 Fourier 变换即可得 (b). 结论 (c) 的证明类似于引理 5.1.2 的证明. 只需说明在 f 的 Lebesgue 点 x 处

$$\lim_{y\to0}\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t_j}{(y^2+|t|)^{n+1}}f(x-t)dt-\int_{|t|>y}\frac{t_j}{|t|^{n+1}}f(x-t)dt\right\}=0. \tag{5.2.16}$$

令

$$\varphi(t)=\begin{cases}\dfrac{t_j}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}-\dfrac{t_j}{|t|^{n+1}}, & |t|\geqslant1,\\ \dfrac{t_j}{(1+|t|^2)^{(n+1)/2}}, & |t|<1,\end{cases}$$

且记 $\varphi_y(t)=\frac{1}{y^n}\varphi(\frac{t}{y})$. 又注意到存在常数 $C=C(n)$, 使得

$$\psi(x)=\sup_{|t|\geqslant|x|}|\varphi(t)|\leqslant\begin{cases}\dfrac{C}{|x|^n(1+|x|^2)}, & |x|\geqslant1,\\ C, & |x|<1.\end{cases}$$

故 φ 的递减径向控制函数 $\psi\in L^1(\mathbb{R}^n)$. 由定理 1.3.2, 在 f 的 Lebesgue 点 x 处

$$\lim_{y\to0}\int_{\mathbb{R}^n}f(x-t)\varphi_y(t)dt=f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t)dt=0.$$

此即为 (5.2.16). 最后，我们说明结论 (d). 对 $j=1,2,\cdots,n$, 由 (b) 及 (1.3.9)

$$v_{j,+}^*(x)=\sup_{y>0}|P_y*R_jf(x)|\leqslant C_nM(R_jf)(x).$$

由于 Hardy-Littlewood 极大算子和 Riesz 变换均为 (p,p) 型算子, 从而 $v_{j,+}^*$ 亦为 (p,p) 型算子. 同样，由 (b) 及 (1.3.13) 可得 $v_{j,\nabla,\alpha}^*$ 的 (p,p) 有界性. □

定义 5.2.2 ($\mathbb{R}_+^{n+1}$ 上共轭调和函数系) 设 $\{u_j\}_{j=0}^n\subset C^2(\mathbb{R}_+^{n+1})$, 且满足如下的广义 Cauchy-Riemann 方程：

$$\sum_{j=0}^n\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=0,\qquad\frac{\partial u_j}{\partial x_k}=\frac{\partial u_k}{\partial x_j},\quad j,\,k=0,1,2,\cdots,n,\quad j\neq k. \tag{5.2.17}$$

则称 $F=\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的共轭调和函数系.

例如，$F=\left\{\dfrac{x_0}{r^{n+1}},\dfrac{x_1}{r^{n+1}},\cdots,\dfrac{x_n}{r^{n+1}}\right\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的共轭调和函数系, 这里 $r=\left(\sum\limits_{j=0}^{n}|x_j|^2\right)^{1/2}$.

下面的定理说明, 通过 Riesz 变换可以刻画 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的共轭调和函数系.

定理 5.2.11 设 $f,f_1,\cdots,f_n\in L^2(\mathbb{R}^n)$. 它们的 Poisson 积分分别记为

$$u_0(x,y)=P_y*f(x),\quad u_1(x,y)=P_y*f_1(x),\ \cdots,\ u_n(x,y)=P_y*f_n(x).$$

那么 $F=\{u_0,u_1,\cdots,u_n\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的共轭调和函数系的充分必要条件是

$$f_j=R_jf,\qquad j=1,2,\cdots,n. \tag{5.2.18}$$

证明 设 (5.2.18) 成立. 那么应用 (2.1.8) 及 (5.2.4) 有

$$u_0(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi y|t|}dt$$

及对 $j=1,2,\cdots,n$,

$$u_j(x,y)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_j(t)e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi y|t|}dt=-i\int_{\mathbb{R}^n}\frac{t_j}{|t|}\cdot\hat{f}(t)e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi y|t|}dt.$$

通过在积分号下的微分可知 (5.2.17) 成立. 反之，记 $f=f_0$, 由定理条件

$$u_j(x,y)=P_y*f_j(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}_j(t)e^{2\pi ix\cdot t}e^{-2\pi y|t|}dt,\qquad j=0,1,\cdots,n.$$

由 (5.2.17) 式, 对 $j=1,2,\cdots,n$,

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_j}=\frac{\partial u_j}{\partial x_0}=\frac{\partial u_j}{\partial y}.$$

因此由 Fourier 变换的唯一性

$$2\pi it_j\hat{f}(t)e^{-2\pi y|t|}=-2\pi|t|\hat{f}_j(t)e^{-2\pi y|t|}.$$

故对 $j=1,2,\cdots,n$,

$$\hat{f}_j(t)=-it_j|t|^{-1}\hat{f}(t).$$

此即为 (5.2.18). □

§5.2.4 $\mathbb{R}^n$ 上的实 Hardy 空间及 BMO 空间介绍 *

1960 年, E. M. Stein 和 G. Weiss 建立了 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的 Hardy 空间 $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(p > \frac{n-1}{n})$ (见 [50]), 并证明了 $H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 中函数几乎处处存在非切向极限.

定义 5.2.3 ($\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的 Hardy 空间) 设 $\frac{n-1}{n} < p \leqslant 1$, $F = \{u_0, u_1, \cdots, u_n\}$ 为 $\mathbb{R}^{n+1}_+$ 上的共轭调和函数系. 称 $F \in H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, 如果

$$\|F\|_{H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)} = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,y)|^p dx \right)^{1/p} < \infty,$$

其中 $|F(x,y)| = \left(\sum_{j=0}^{n} |u_j(x,y)|^2 \right)^{1/2}$.

定理 5.2.12 设 $F \in H^p(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ $(\frac{n-1}{n} < p \leqslant 1)$. 那么 $F(x,t)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处存在非切向极限, 且当 $t \to 0$ 时, $F(x,t)$ 在 L^p 意义下收敛到同一极限.

定理 5.2.13 $F = \{u_0, u_1, \cdots, u_n\} \in H^1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 的充分必要条件是存在 $f_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 使得 $u_0(x,y) = P_y(f_0)(x)$ 及 $u_j(x,y) = P_y(R_j f_0)(x)$, $(j = 1, 2, \cdots, n)$. 此时还有

$$\|F\|_{H^1(\mathbb{R}^{n+1}_+)} \sim \|f_0\|_1 + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f_0\|_1. \tag{5.2.19}$$

1972 年 C. Fefferman 和 E. M. Stein [28] 引入了 $\mathbb{R}^n$ 上的实 Hardy 空间.

定义 5.2.4 $\mathbb{R}^n$ 上的实 Hardy 空间定义为

$$H^1(\mathbb{R}^n) =: \{f \in L^1(\mathbb{R}^n): \quad R_j f \in L^1(\mathbb{R}^n), \quad 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

对 $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, 记

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_1 + \sum_{j=1}^{n} \|R_j f\|_1,$$

那么 $\|\cdot\|_{H^1}$ 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 上的范数, 且按上述范数成为 Banach 空间. 由 (5.2.19) 知 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 是与 $H^1(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ 具有等价模的空间. Riesz 变换不是 $(1,1)$ 型算子, 然而从上面 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的定义即可看出, Riesz 变换是从 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 到 $L^1(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子.

定义 5.2.5 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 空间定义为

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \{f \in L_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n): \ \|f\|_* < \infty\},$$

其中

$$\|f\|_* = \sup_{Q\subset\mathbb{R}^n} \frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x) - f_Q|dx,$$

这里 Q 为 $\mathbb{R}^n$ 中边与坐标轴平行的方体，$f_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q f(x)dx$，称为 f 在 Q 上的平均.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ 按范数 $\|\cdot\|_*$ 成为 Banach 空间，且 $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$. 容易验证，$L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 的子空间，且由 $\log|x| \in BMO(\mathbb{R})$ 知 $L^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq BMO(\mathbb{R}^n)$.

BMO 空间即有界平均振动空间，它首先由 F. John 和 L. Nirenberg [34] 在 1961 年研究一类非线性偏微分方程问题时提出的. BMO 空间与复分析、偏微分方程、概率论等领域均有密切联系，是现代分析中十分重要的研究对象之一. 在 [28] 中 C. Fefferman 和 E. M. Stein 证明了，在同构的意义下 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 是 $H^1(\mathbb{R}^n)$ 的对偶空间这一著名结果. 此外，在 [28] 中还给出了 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 的一个等价定义

$$BMO(\mathbb{R}^n) = \left\{f = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n R_j\varphi_j : \quad \varphi_j \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leqslant j \leqslant n\right\}.$$

当 $p = \infty$ 时，Riesz 变换也不是 (∞,∞) 型算子. 显然，由上述等价定义即知，Riesz 变换是 $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 到 $BMO(\mathbb{R}^n)$ 的有界线性算子.

有关实 Hardy 空间和 BMO 空间的上述事实的详细证明及实 Hardy 空间的其他特征刻画（如极大函数特征、Littlewood-Paley 函数特征、原子 - 分子特征等）可看 [50] [28] [36] [8] 和 [3].

[注 5.2.7] 直线上的实 Hardy 空间定义为：

$$H^1(\mathbb{R}) = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \quad Hf \in L^1(\mathbb{R})\}.$$

$H^1(\mathbb{R})$ 的对偶空间为 $BMO(\mathbb{R})$ 空间. 此外，Hilbert 变换是从 $H^1(\mathbb{R})$ 到 $L^1(\mathbb{R})$，及 $L^\infty(\mathbb{R})$ 到 $BMO(\mathbb{R})$ 的有界线性算子.

§5.3 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

Calderón-Zygmund 奇异积分算子是 Riesz 变换的推广. 另一方面它也直接来源于二阶椭圆方程解的正则性研究. 我们知道，当 $n \geqslant 3$ 时，Laplace 算子 Δ

的基本解为

$$\Gamma(x) = \frac{1}{(2-n)\omega_{n-1}} \frac{1}{|x|^{n-2}}.$$

当 f 具有一定性质时（如 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$），那么 $\Gamma * f$ 是 Poisson 方程 $\Delta u = f$ 的解. 记

$$u(x) = \Gamma * f(x) = C(n) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-2}} dy,$$

并对 u 形式地求二阶偏导数得

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_j^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy := \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy,$$

其中 $\Omega_j(y) = C(n)(1 - n|y|^{-2}y_j^2)$. 如果令

$$T_j f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{\Omega_j(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy,$$

那么方程 $\Delta u = f$ 解的 L^p 正则性便归结为算子 T_j 的 L^p 有界性.

容易看出，上面导出的 $\Omega_j(y) = C(n)(1 - n|y|^{-2}y_j^2)$ 满足如下条件:

$$\Omega(\lambda y) = \Omega(y), \quad \forall\, \lambda > 0,\ y \neq 0; \tag{5.3.1}$$

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y')dy' = 0; \tag{5.3.2}$$

$$\Omega \in L^1(\mathbb{S}^{n-1}). \tag{5.3.3}$$

设 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ 上定义的函数 Ω 满足上述条件 (5.3.1)~(5.3.3), 那么对 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 如下定义的算子 T_Ω 称为 Calderón-Zygmund 奇异积分算子:

$$T_\Omega f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)dy. \tag{5.3.4}$$

通常 (5.3.1) 称为零阶齐次条件, (5.3.2) 称为消失条件, (5.3.3) 则称为尺寸条件.

特别地，取 $\Omega(x) = c_n \frac{x_j}{|x|}\,(j = 1, 2, \cdots, n)$, 那么 T_Ω 即为 Riesz 变换 $R_j\,(j = 1, 2, \cdots, n)$. 当 $n = 1$ 时，取 $\Omega(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{sgn} x$, 则 T_Ω 恰好为 Hilbert 变换 H.

[注 5.3.1] 消失条件 (5.3.2) 对于由 (5.3.4) 定义的奇异积分算子的存在性是必要的. 事实上，取 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 并当 $|x| \leqslant 2$ 时 $\varphi(x) = 1$. 那么对 $|x| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} T_\Omega(\varphi)(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon<|y|\leqslant 1} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \varphi(x-y)dy + \int_{|y|>1} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \varphi(x-y)dy \\ &:= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

显然 $I_2 < \infty$, 但

$$I_1 = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon<|y|\leqslant 1}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}dy = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')dy'\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dr}{r}\right\}$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')dy'\log\frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

因此仅当 Ω 满足消失条件 (5.3.2) 时, $T_\Omega(\varphi)$ 才有意义.

[注 5.3.2] 如不特别说明, 以下称 "奇异积分算子 T_Ω" 均指由 (5.3.4) 所定义, 且 Ω 满足条件 (5.3.1)~(5.3.3).

§5.3.1 奇异积分算子的 L^2 有界性的特征

首先说明奇异积分算子 T_Ω 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上是存在的. 注意到 $\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中任一含有原点的开球上不可积, 因此 $\frac{\Omega(x)}{|x|^n} \notin \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. 然而由

$$K(x) = \text{p.v.}\frac{\Omega(x)}{|x|^n}, \qquad x \neq 0$$

可定义 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的一个主值广义函数.

引理 5.3.1 设 $n \geqslant 2$, 那么 $K(x) = \text{p.v.}\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ 定义了 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的主值广义函数, 且

$$\hat{K}(\xi) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\left(\log\frac{1}{|\xi\cdot y'|} - \frac{i\pi}{2}\text{sgn}\,(\xi\cdot y')\right)dy'. \tag{5.3.5}$$

证明 注意到 Ω 满足条件 (5.3.1)~(5.3.3), 任取 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 有

$$|L_K(\varphi)| = \left|\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon\leqslant|y|\leqslant 1}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}(\varphi(y)-\varphi(0))dy + \int_{|y|>1}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}\varphi(y)dy\right|$$
$$\leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty\int_{|y|\leqslant 1}\frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n-1}}dy + \sup_{t\in\mathbb{R}^n}\{|t||\varphi(t)|\}\int_{|y|>1}\frac{|\Omega(y)|}{|y|^{n+1}}dy$$
$$\leqslant C'\|\nabla\varphi\|_\infty\|\Omega\|_1 + C''\sum_{|\alpha|\leqslant 1}\|t^\alpha\varphi(t)\|_\infty\|\Omega\|_1,$$

其中 C', C'' 仅与 n 有关, 且 $\|\Omega\|_1$ 为 Ω 的 $L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 范数.

下面证明 (5.3.5) 式成立. 对 $0<\varepsilon<N<\infty$, 记 $K_\varepsilon^N(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}\chi_{\{\varepsilon<|x|<N\}}(x)$,

那么 $K_\varepsilon^N \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 如令 $\xi = r\xi'$, $y = Ry'$, 应用消失条件得到

$$\begin{aligned}\hat{K}_\varepsilon^N(\xi) &= \int_{\varepsilon<|y|<N} e^{-2\pi i\xi\cdot y}\frac{\Omega(y)}{|y|^n}dy\\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi irR\xi'\cdot y'}-\cos(2\pi rR)}{R}dR\,dy'.\end{aligned}$$

写

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi irR\xi'\cdot y'}-\cos(2\pi rR)}{R}dR = &\int_\varepsilon^N \frac{\cos(2\pi rR\xi'\cdot y')-\cos(2\pi rR)}{R}dR\\ &-i\int_\varepsilon^N \frac{\sin(2\pi rR\xi'\cdot y')}{R}dR.\end{aligned}$$

容易看出

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{\sin(2\pi rR\xi'\cdot y')}{R}dR &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_{2\pi r\varepsilon\xi'\cdot y'}^{2\pi rN\xi'\cdot y'}\frac{\sin s}{s}ds\\ &= \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi'\cdot y').\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

另一方面

$$\begin{aligned}&\int_\varepsilon^N \frac{\cos(2\pi rR\xi'\cdot y')-\cos(2\pi rR)}{R}dR\\ &= \int_{2\pi r\varepsilon|\xi'\cdot y'|}^{2\pi rN|\xi'\cdot y'|}\frac{\cos s}{s}ds - \int_{2\pi r\varepsilon}^{2\pi rN}\frac{\cos s}{s}ds\\ &= \int_{2\pi r\varepsilon|\xi'\cdot y'|}^{2\pi r\varepsilon}\frac{\cos s}{s}ds - \int_{2\pi rN|\xi'\cdot y'|}^{2\pi rN}\frac{\cos s}{s}ds.\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

注意到当 $0<\alpha\leqslant 1$ 且 $0<\varepsilon<\frac{\pi}{2}$ 时有

$$\int_{\alpha\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\cos s}{s}ds \leqslant \int_{\alpha\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{ds}{s} = \log\frac{1}{\alpha},$$

以及

$$\int_{\alpha\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\cos s}{s}ds \geqslant \cos\varepsilon\int_{\alpha\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{ds}{s} = \cos\varepsilon\log\frac{1}{\alpha},$$

由此推出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{2\pi r\varepsilon|\xi'\cdot y'|}^{2\pi r\varepsilon}\frac{\cos s}{s}ds = \log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}.$$

又对 $0<\alpha\leqslant 1$,

$$\left|\int_{\alpha N}^{N}\frac{\cos s}{s}ds\right| \leqslant \frac{|\sin N|}{N}+\frac{|\sin(\alpha N)|}{\alpha N}+\int_{\alpha N}^{N}\frac{ds}{s^2}\to 0 \qquad (N\to\infty).$$

这样由 (5.3.7) 得到

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{\cos(2\pi rR\xi'\cdot y')-\cos(2\pi rR)}{R}dR=\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}.$$

此式连同 (5.3.6) 有

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi irR\xi'\cdot y'}-\cos(2\pi rR)}{R}dR=\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi'\cdot y'). \tag{5.3.8}$$

由 (5.3.8) 可知存在与 ε, N 均无关的常数 $C>0$ 使得

$$\Big|\int_\varepsilon^N \frac{e^{-2\pi irR\xi'\cdot y'}-\cos(2\pi rR)}{R}dR\Big|\leqslant C\Big(1+\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}\Big). \tag{5.3.9}$$

下面说明

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|\Big(1+\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}\Big)dy'<\infty,\quad \text{a.e. } \xi'\in\mathbb{S}^{n-1}. \tag{5.3.10}$$

注意到

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}d\xi'=\omega_{n-2}\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta\log\frac{1}{|\cos\theta|}d\theta<\infty, \tag{5.3.11}$$

其中 ω_{n-2} 为 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中单位球面的面积. 应用 Fubini 定理有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big\{\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|\Big(1+\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}\Big)dy'\Big\}d\xi'\\ &\qquad=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big\{\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Big(1+\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}\Big)d\xi'\Big\}|\Omega(y')|dy'<\infty.\end{aligned}$$

由此即得 (5.3.10). 最后，我们来完成 (5.3.5) 的证明. 由 (5.3.9) 及 (5.3.10) 并应用 Lebesgue 控制收敛定理及 (5.3.8) 得到

$$\begin{aligned}&\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\widehat{K_\varepsilon^N}(\xi)\\ &=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ N\to\infty}}\Big\{\int_\varepsilon^N\frac{e^{-2\pi irR\xi'\cdot y'}-\cos(2\pi rR)}{R}dR\Big\}dy'\\ &=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\Big(\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi'\cdot y')\Big)dy'\\ &=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\Big(\log\frac{1}{|\xi\cdot y'|}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{sgn}(\xi\cdot y')\Big)dy'.\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

现任取 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 应用乘法公式

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{K_\varepsilon^N}(\xi)\varphi(\xi)d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon^N(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

另一方面，注意到 K 定义了 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ 中的主值广义函数，因此

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\hat{K}(\xi)\varphi(\xi)d\xi &= \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n}K(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}K_\varepsilon^N(\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ N\to\infty}}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{K_\varepsilon^N}(\xi)\varphi(\xi)d\xi.\end{aligned}$$

对上式应用 Lebesgue 控制收敛定理及 (5.3.12) 便得到 (5.3.5). □

显然，奇异积分算子 T_Ω 可延拓为 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上定义的算子. 下面的定理给出了 T_Ω 为 $(2,2)$ 型算子的特征刻画.

定理 5.3.2 T_Ω 是 $(2,2)$ 型算子当且仅当

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\log\frac{1}{|\xi\cdot y'|}dy'\right|<\infty. \tag{5.3.13}$$

证明 因 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 由 (5.3.5)

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\hat{K}(\xi)\right|<\infty\Longleftrightarrow\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\log\frac{1}{|\xi\cdot y'|}dy'\right|<\infty.$$

应用定理 3.3.4 便得所需结论. □

推论 5.3.3 设 Ω 满足 (5.3.1) 及 (5.3.2). 又如 $\Omega\in L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1})$, 即：

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|\log^+|\Omega(y')|dy'<\infty, \tag{5.3.14}$$

那么 T_Ω 是 $(2,2)$ 型算子.

证明 只需验证 (5.3.14) 蕴含了 (5.3.13). 由 Ω 满足 (5.3.2) 知

$$\begin{aligned}&\sup_{\xi\in\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\log\frac{1}{|\xi\cdot y'|}dy'\right|<\infty\\ &\qquad\Longleftrightarrow\sup_{\xi'\in\mathbb{S}^{n-1}}\left|\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(y')\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}dy'\right|<\infty.\end{aligned}$$

由 (5.3.11), 下面仅考虑 $|\Omega(y')|\geqslant1$ 的情形. 任取 $\xi'\in\mathbb{S}^{n-1}$, 应用初等不等式：

$$ab\leqslant a\log a+e^b,\qquad\forall\, a\geqslant1,\ b>0,$$

得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\Omega(y')|\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}&=|\Omega(y')|\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|^{1/2}}\\&\leqslant|\Omega(y')|\log^+|\Omega(y')|+\frac{1}{|\xi'\cdot y'|^{1/2}}.\end{aligned}$$

注意到

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{1}{|\xi'\cdot y'|^{1/2}}dy'=\omega_{n-2}\int_0^\pi\sin^{n-2}\theta\frac{1}{|\cos\theta|^{1/2}}d\theta<\infty.$$

以上事实连同 (5.3.14) 说明

$$\sup_{\xi'\in\mathbb{S}^{n-1}}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}|\Omega(y')|\log\frac{1}{|\xi'\cdot y'|}dy'<\infty.$$

从而 (5.3.13) 成立. □

推论 5.3.4 设 Ω 满足 (5.3.1) 和 (5.3.3). 如 Ω 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的奇函数, 即:

$$\Omega(-y')=-\Omega(y'),\qquad\forall\, y'\in\mathbb{S}^{n-1}.\tag{5.3.15}$$

则 T_Ω 必为 (2,2) 型算子.

证明 留作习题.

[注 5.3.3] 如 Ω 满足 (5.3.1), (5.3.3) 及 (5.3.15) (此时 (5.3.2) 自动满足), 则称相应的奇异积分算子 T_Ω 为带奇核的奇异积分算子. 类似地, 如 Ω 满足 (5.3.1)~(5.3.3), 并为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的偶函数, 即:

$$\Omega(-y')=\Omega(y'),\qquad\forall\, y'\in\mathbb{S}^{n-1},\tag{5.3.16}$$

则称相应的奇异积分算子 T_Ω 为带偶核的奇异积分算子.

§5.3.2 经典 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

我们现在讨论经典的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的有界性问题. 它首先由 A. P. Calderón 和 A. Zygmund [17] 在 1952 年所创立. 下面的 (5.3.19) 称为 Hömander 条件, 它由 L. Hömander [33] 在 1960 年提出. Hömander 条件减弱了 [17] 中最初给出的 Calderón-Zygmund 核的光滑性条件.

设 $K\in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^n\backslash\{0\})$. 如存在常数 $A_1,A_2>0$, 使得 K 满足如下条件:

$$|K(x)|\leqslant A_1|x|^{-n},\quad\forall\, x\neq 0;\tag{5.3.17}$$

$$\int_{r\leqslant|x|\leqslant R} K(x)dx = 0, \quad \forall\ 0<r<R<\infty; \tag{5.3.18}$$

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|} |K(x-y)-K(x)|dx \leqslant A_2, \quad \forall\, y\neq 0, \tag{5.3.19}$$

则 K 称为 Calderón-Zygmund 核.

定理 5.3.5 设 K 是一个 Calderón-Zygmund 核. 对 $\varepsilon>0$ 及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)(1\leqslant p<\infty)$, 令

$$T_\varepsilon f(x) = \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)K(y)dy.$$

那么

(a) T_ε 是弱 (1,1) 型和 (p,p) 型算子 $(1<p<\infty)$, 且 $\|T_\varepsilon\|_{w(1,1)}$ 和 $\|T_\varepsilon\|_{(p,p)}$ 均与 ε 无关;

(b) 对 $1<p<\infty$ 及 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f$ 在 L^p 范数意义下存在, 记为

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy, \tag{5.3.20}$$

则 T 为 (p,p) 型算子;

(c) 对 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f$ 依测度收敛意义下存在, 记为

$$Tf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f(x) = \text{p.v.}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy, \tag{5.3.21}$$

那么 T 为弱 (1,1) 型算子.

[注 5.3.4] 由 Calderón-Zygmund 核及 (5.3.20), (5.3.21) 所定义的积分算子 T 称为经典 Calderón-Zygmund 奇异积分算子.

定理 5.3.5 的证明 对 $\varepsilon>0$, 令 $K_\varepsilon(x) = K(x)\chi_{\{\varepsilon<|x|\}}(x)$, 则 $T_\varepsilon f(x) = K_\varepsilon * f(x)$. 下面先说明 K_ε 关于 ε 一致满足 (5.3.17)~(5.3.19). 显然, 我们只需说明 K_ε 关于 ε 一致满足 (5.3.19). 事实上, 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意满足 $y\neq 0$ 及 $|x|\geqslant 2|y|$ 的 x,y, 如 $x,\ x-y\in\overline{B(\varepsilon)}$, 那么 $K_\varepsilon(x)=K_\varepsilon(x-y)=0$. 如 $x,\ x-y\in(\ \overline{B(\varepsilon)}\ )^c$, 那么 $K_\varepsilon(x)=K(x)$ 且 $K_\varepsilon(x-y)=K(x-y)$, 此时 K_ε 满足 (5.3.19). 如 $|x|>\varepsilon$ 且 $|x-y|<\varepsilon$, 则 $|x|/2\leqslant|x-y|<\varepsilon$ 且 $\varepsilon<|x|<2\varepsilon$. 因此由 (5.3.17)

$$\int_{|x|\geqslant 2|y|} |K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x)|dx \leqslant \int_{\varepsilon<|x|<2\varepsilon} |K_\varepsilon(x)|dx \leqslant CA_1,$$

其中 C 与 ε 无关. 类似地, 当 $|x|<\varepsilon$ 且 $|x-y|>\varepsilon$ 时, K_ε 关于 ε 仍一致满足 (5.3.19).

由此, 对 $\varepsilon > 0$ 及 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leqslant p < \infty)$, $T_\varepsilon f$ 是存在的.

(a) 的证明：第一步证明 $\{T_\varepsilon\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界（关于 ε）.

由于 $K_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^n)$, 由定理 3.3.4 和 Plancherel 定理, 如能说明存在 $C > 0$, 使得对任意的 $\varepsilon > 0$,

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{K_\varepsilon}(\xi)| \leqslant CB, \tag{5.3.22}$$

则 $\{T_\varepsilon\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界.

现给定 $\varepsilon > 0$. 对任意的 $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi \neq 0$, 任取 $R > \max\{\varepsilon, \frac{1}{|\xi|}\}$. 令 $K_\varepsilon^R(x) = K_\varepsilon(x)\chi_{\{|x| \leqslant R\}}(x)$, 那么 $K_\varepsilon^R \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 且

$$\begin{aligned}
\widehat{K_\varepsilon^R}(\xi) &= \int_{|x| \leqslant R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x) dx \\
&= \left(\int_{|x| \leqslant \frac{1}{|\xi|}} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x) dx + \int_{\frac{1}{|\xi|} < |x| \leqslant R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x) dx \right) \\
&:= I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

由 (5.3.17) 和 (5.3.18) 得到

$$|I_1| = \left| \int_{|x| \leqslant \frac{1}{|\xi|}} (e^{-2\pi i x \cdot \xi} - 1) K_\varepsilon(x) dx \right| \leqslant C|\xi| \int_{|x| \leqslant \frac{1}{|\xi|}} |x||K_\varepsilon(x)| dx \leqslant CA_1.$$

对于 I_2, 取 $y = \frac{\xi}{2|\xi|^2}$, 则 $e^{2\pi i y \cdot \xi} = -1$. 这样

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{\frac{1}{|\xi|} < |x-y| \leqslant R} e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx \\
&= -\int_{\frac{1}{|\xi|} < |x-y| \leqslant R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx \\
&= -\int_{\frac{1}{|\xi|} < |x| \leqslant R} e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx + J,
\end{aligned}$$

其中

$$J = \left(\int_{\frac{1}{|\xi|} < |x| \leqslant R} - \int_{\frac{1}{|\xi|} < |x-y| \leqslant R} \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} K_\varepsilon(x-y) dx.$$

因此

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{|\xi|} < |x| \leqslant R} [K_\varepsilon(x) - K_\varepsilon(x-y)] e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx + \frac{J}{2}.$$

由 $|y|=\frac{1}{2|\xi|}$ 知

$$\left|\int_{\frac{1}{|\xi|}<|x|\leqslant R}[K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y)]e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx\right|\leqslant\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K_\varepsilon(x)-K_\varepsilon(x-y)|dx$$
$$\leqslant CA_2,$$

其中 C 与 ε,ξ 均无关. 另一方面, 如记

$$E=\left\{x:\frac{1}{|\xi|}<|x|\leqslant R\right\}\triangle\left\{x:\frac{1}{|\xi|}<|x-y|\leqslant R\right\}$$

为对称差, 那么

$$|J|\leqslant\int_E|K_\varepsilon(x-y)|dx.$$

注意到 $|y|=\dfrac{1}{2|\xi|}$, 因此

$$E\subset\left\{x:\frac{1}{2|\xi|}\leqslant|x|\leqslant\frac{2}{|\xi|}\right\}\bigcup\left\{x:\frac{R}{2}\leqslant|x|\leqslant 2R\right\}.$$

这样由 (5.3.17) 得到

$$|J|\leqslant\int_{\frac{1}{2|\xi|}\leqslant|x|\leqslant\frac{2}{|\xi|}}|K_\varepsilon(x-y)|dx+\int_{\frac{R}{2}\leqslant|x|\leqslant 2R}|K_\varepsilon(x-y)|dx\leqslant CA_1,$$

这里 C 均与 ξ,ε 无关. 由 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 中 Fourier 变换的定义, 我们实际上已证明了 (5.3.22). 从而 $\{T_\varepsilon\}$ 在 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界.

第二步证明 $\{T_\varepsilon\}$ 为弱 $(1,1)$ 型算子, 且其界与 ε 无关.

设 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 且 $\lambda>0$, 由 Calderón-Zygmund 分解 (定理 5.1.8), 得到一列内部两两不交的方体列 $\{Q_j\}$ 及函数 g,b, 使得 $f=g+b$ 并满足以下性质:

(i) $\|g\|_2^2\leqslant C\lambda\|f\|_1,\quad |g(x)|\leqslant 2^n\lambda,\quad$ a.e. $x\in\mathbb{R}^n$;

(ii) $\lambda\leqslant\dfrac{1}{|Q_j|}\displaystyle\int_{Q_j}|f(x)|dx\leqslant 2^n\lambda,\quad j=1,2,\cdots$

(iii) $\displaystyle\sum_j|Q_j|\leqslant\frac{1}{\lambda}\|f\|_1$;

(iv) $b(x)=\displaystyle\sum_j b_j(x),\ \int_{Q_j}b_j(x)dx=0$, $\mathrm{supp}b_j\subset Q_j$ 且 $\|b_j\|_1\leqslant 2\displaystyle\int_{Q_j}|f(x)|dx$.

这样 $T_\varepsilon f(x)=T_\varepsilon g(x)+T_\varepsilon b(x)$, 且

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon f(x)|>\lambda\}|&\leqslant\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon g(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\\&\quad+\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:|T_\varepsilon b(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\\&:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

由 $\{T_\varepsilon\}$ 的 $L^2(\mathbb{R}^n)$ 一致有界性和 (i) 得到

$$I_1\leqslant\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2\int_{\mathbb{R}^n}|T_\varepsilon g(x)|^2dx\leqslant\frac{4C}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}^n}|g(x)|^2dx\leqslant\frac{4C}{\lambda}\|f\|_1.$$

为估计 I_2, 记 $Q_j^*=2\sqrt{n}Q_j$ 是与 Q_j 同心且边长为 Q_j 的边长的 $2\sqrt{n}$ 倍的方体. 令 $E^*=\bigcup_j Q_j^*$, 那么由 (iii)

$$|E^*|\leqslant\sum_j|Q_j^*|\leqslant\frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1.$$

这样

$$I_2\leqslant|E^*|+\left|\left\{x\notin E^*:|T_\varepsilon b(x)|>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\leqslant\frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1+\frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n\setminus E^*}|T_\varepsilon b(x)|dx.$$

注意到 $|T_\varepsilon b(x)|\leqslant\sum_j|T_\varepsilon b_j(x)|$, 只需证明

$$\sum_j\int_{\mathbb{R}^n\setminus E^*}|T_\varepsilon b_j(x)|dx\leqslant C\|f\|_1. \tag{5.3.23}$$

记 Q_j 的中心为 y_j, 由 (5.3.18) 得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus E^*}|T_\varepsilon b_j(x)|dx&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*}\int_{Q_j}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x-y_j)||b_j(y)|dydx\\&\leqslant\int_{Q_j}|b_j(y)|\int_{\mathbb{R}^n\setminus Q_j^*}|K_\varepsilon(x-y)-K_\varepsilon(x-y_j)|dxdy\\&\leqslant CA_2\int_{Q_j}|b_j(y)|dy\\&\leqslant 2CA_2\int_{Q_j}|f(y)|dy.\end{aligned}$$

此连同 (ii) 及 (iii) 得到 (5.3.23). 由此得出第二步的结论.

第三步, 应用 Marcinkiewicz 算子内插定理 (定理 1.4.2) 知对 $1 < p < 2$, $\{T_\varepsilon\}$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上一致有界. 最后, 对 $2 < p < \infty$, 有 $1 < p' < 2$. 如记 $\widetilde{T_\varepsilon}$ 为 T_ε 的共轭算子, 那么 $\widetilde{T_\varepsilon} f(x) = \widetilde{K_\varepsilon} * f(x)$, 其中 $\widetilde{K_\varepsilon}(x) = \overline{K_\varepsilon(-x)}$. 显然 $\widetilde{K_\varepsilon}$ 也满足 K_ε 的所有条件, 因此 $\widetilde{T_\varepsilon}$ 为 (p', p') 型算子. 现对任意的 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\begin{aligned}
\|T_\varepsilon f\|_p &= \sup_{\|g\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} T_\varepsilon f(x) g(x) dx \right| \\
&= \sup_{\|g\|_{p'} \leqslant 1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \widetilde{T_\varepsilon} g(x) dx \right| \\
&\leqslant \|f\|_p \cdot \sup_{\|g\|_{p'} \leqslant 1} \left\| \widetilde{T_\varepsilon} g \right\|_{p'} \\
&\leqslant A_p \|f\|_p.
\end{aligned}$$

很明显, 这里 A_p 与 ε 及 f 均无关. 至此我们证明了结论 (a).

(b) 的证明: 首先说明对 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 及 $y \in \mathbb{R}^n$ $(y \neq 0)$, 有如下事实:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leqslant C|y|, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{5.3.24}$$

当 $p = \infty$ 时, 上式是明显的. 我们仅考虑 $1 \leqslant p < \infty$ 的情形. 由

$$\frac{d}{dt} f(x - ty) = \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty),$$

得

$$\begin{aligned}
f(x-y) - f(x) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x - ty) dt \\
&= \int_0^1 \langle \nabla f, -y \rangle (x - ty) dt \\
&= \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy') ds.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^{|y|} \langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy') ds \right|^p dx \right)^{1/p} \\
&\leqslant \int_0^{|y|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \nabla f, -y' \rangle (x - sy')|^p dx \right)^{1/p} ds \\
&\leqslant |y| \cdot \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right\|_p .
\end{aligned}$$

这样得到 (5.3.24). 现回到 (b) 的证明. 对 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 及 $0 < \eta < \varepsilon$, 由 (5.3.24) 和 (5.3.17) 有

$$\begin{aligned}\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leqslant \int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} |K(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)-f(x)|^p dx\right)^{1/p} dy \\ &\leqslant C \int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} |y|\cdot|K(y)|dy \\ &\leqslant CA_1(\varepsilon-\eta) \longrightarrow 0 \qquad (\text{当}\ \ \eta,\varepsilon \longrightarrow 0).\end{aligned}$$

此事实说明, 对 $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\{T_\varepsilon f\}$ 是 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列.

现设 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 那么对任意的 $\delta > 0$, 存在 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f = g + h$ 且 $\|h\|_p < \delta$. 因此当 $0 < \eta < \varepsilon$ 时, 由结论 (a)

$$\begin{aligned}\|T_\eta f - T_\varepsilon f\|_p &\leqslant \|T_\eta(f-g)\|_p + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p + \|T_\varepsilon(g-f)\|_p \\ &\leqslant 2A_p\delta + \|T_\eta g - T_\varepsilon g\|_p \\ &\longrightarrow 2A_p\delta, \qquad (\text{当}\ \ \eta,\ \varepsilon \longrightarrow 0)\end{aligned}$$

再由 δ 的任意性知, 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\{T_\varepsilon f\}$ 仍为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的 Cauchy 列. 记其在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的极限为 Tf, 那么

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} \|T_\varepsilon f - Tf\|_p = 0.$$

由此即知

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p &\leqslant \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + \|T_\varepsilon f\|_p \\ &\leqslant \|Tf - T_\varepsilon f\|_p + A_p\|f\|_p \longrightarrow A_p\|f\|_p \quad (\text{当}\ \varepsilon \longrightarrow 0).\end{aligned}$$

故

$$\|Tf\|_p \leqslant A_p\|f\|_p, \quad \text{对} \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

(c) **的证明**: 其证明思想同上. 对 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 及任意的 $\lambda > 0$, 当 $0 < \eta < \varepsilon$ 时, 由 (5.3.24) 和 (5.3.17)

$$\begin{aligned}|\{x : |T_\eta g(x) - T_\varepsilon g(x)| > \lambda\}| &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |T_\eta g(x) - T_\varepsilon g(x)|dx \\ &\leqslant \frac{1}{\lambda}\int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} |K(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x-y)-g(x)|dx\right) dy \\ &\leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\eta<|y|\leqslant\varepsilon} |y|\cdot|K(y)|dy \\ &\leqslant \frac{CA_1(\varepsilon-\eta)}{\lambda} \longrightarrow 0 \quad (\text{当}\ \ \eta,\ \varepsilon \longrightarrow 0).\end{aligned}$$

此事实说明, 对 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, $\{T_\varepsilon g\}$ 是依测度 Cauchy 列. 现设 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 那么对任意的 $\delta > 0$, 存在 $g \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $f = g + h$ 且 $\|h\|_1 < \delta$. 因此对任意的 $\lambda > 0$, 当 $0 < \eta < \varepsilon$ 时, 由结论 (a)

$$\begin{aligned}|\{x : |T_\eta f(x) - T_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| &\leqslant |\{x : |T_\eta f(x) - T_\eta g(x)| > \lambda/3\}| \\ &\quad + |\{x : |T_\eta g(x) - T_\varepsilon g(x)| > \lambda/3\}| \\ &\quad + |\{x : |T_\varepsilon g(x) - T_\varepsilon f(x)| > \lambda/3\}| \\ &\leqslant \frac{6C\delta}{\lambda} + |\{x : |T_\eta g(x) - T_\varepsilon g(x)| > \lambda/3\}| \\ &\longrightarrow \frac{6C\delta}{\lambda}, \qquad (\text{当 } \eta,\ \varepsilon \longrightarrow 0).\end{aligned}$$

再由 δ 的任意性知, 对 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\{T_\varepsilon f\}$ 仍为依测度 Cauchy 列. 记其在依测度意义下的极限为 Tf, 那么对任意的 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ 及 $\lambda > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} |\{x : |Tf(x) - T_\varepsilon f(x)| > \lambda\}| = 0.$$

因此

$$\begin{aligned}|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| &\leqslant |\{x : |Tf(x) - T_\varepsilon f(x)| > \lambda/2\}| \\ &\quad + |\{x : |T_\varepsilon f(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leqslant |\{x : |Tf(x) - T_\varepsilon f(x)| > \lambda/2\}| + \frac{C}{\lambda}\|f\|_1 \\ &\longrightarrow \frac{C}{\lambda}\|f\|_1, \qquad (\text{当 } \varepsilon \longrightarrow 0).\end{aligned}$$

故结论 (c) 成立. 至此完成了定理 5.3.5 的证明. □

[注 5.3.5] 从上面定理 5.3.5 的证明过程可以看出, 在 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 T 为 L^2 有界的前提下, Hömander 条件 (5.3.19) 便是保证 T 为弱 (1,1) 型算子的充分性条件.

另一方面, 从定理 5.3.5 的证明过程易知, 如将 Calderón-Zygmund 核的条件 (5.3.17) 替换为下面较弱的条件:

$$\sup_{R>0} \int_{R \leqslant |x| \leqslant 2R} |K(x)| dx \leqslant A_1', \tag{5.3.17$'$}$$

定理 5.3.5 的结论仍然成立.

§5.3.3 齐型核奇异积分算子及其极大算子

由 (5.3.4) 定义的奇异积分算子 T_Ω 的核 $K(x) = \text{p.v.}\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$，由于 Ω 满足零阶齐次条件 (5.3.1)，因此也称由 (5.3.4) 定义的奇异积分算子为带齐型核的奇异积分算子. 这类算子的产生也来源于卷积型算子 $Tf = K * f$ 与伸缩变换 η_a的可交换性要求. 事实上，设 $\eta_a\,(a > 0)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的伸缩变换, 如 η_a 与卷积型算子 $Tf = K * f$ 可交换，即 $T\delta_a = \delta_a T$, 那么 T 的核 K 必满足:

$$K(ax) = a^{-n}K(x). \tag{5.3.25}$$

上式表明 K 是 $-n$ 阶齐次的. 这样可重写 $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, 其中 Ω 满足零阶齐次条件 (5.3.1). 下面我们说明，当 Ω 满足一定的尺寸条件时，这类带齐型核的奇异积分算子的 L^p 有界性问题可由定理 5.3.5 得到.

定理 5.3.6 设 Ω 满足 (5.3.1) 和 (5.3.2). 此外 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 且

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(\delta)}{\delta} d\delta < \infty, \tag{5.3.26}$$

其中

$$\omega_\infty(\delta) = \sup_{\substack{x', y' \in S^{n-1} \\ |x'-y'|<\delta}} |\Omega(x') - \Omega(y')|, \qquad 0 < \delta \leqslant 1.$$

对 $\varepsilon > 0$,

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) =: \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} f(x-y)dy$$

称为 T_Ω 的截断算子. 那么对 $1 \leqslant p < \infty$

(a) $T_{\Omega,\varepsilon}$ 是弱 (1,1) 型和 (p,p) 型算子 $(1 < p < \infty)$, 且 $\|T_{\Omega,\varepsilon}\|_{w(1,1)}$ 和 $\|T_{\Omega,\varepsilon}\|_{(p,p)}$ 均与 ε 无关;

(b) 对 $1 < p < \infty$ 及 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f$ 在 L^p 范数意义下存在, 记为

$$T_\Omega f(x) =: \lim_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy,$$

则 T_Ω 为 (p,p) 型算子;

(c) 对 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f$ 依测度收敛意义下存在，记为

$$T_\Omega f(x) =: \lim_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = \text{p.v.} \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K(y)dy,$$

那么 T_Ω 为弱 (1,1) 型算子.

[注 5.3.6] ω_∞ 称为 Ω 的 $L^\infty(S^{n-1})$ 连续模, 而 (5.3.26) 称为 L^∞-Dini 条件.

定理 5.3.6 的证明 注意到, 如记 $K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$, 那么:

(a) $\Omega\in L^\infty(S^{n-1}) \Longleftrightarrow |K(x)|\leqslant A_1|x|^{-n}$;

(b) Ω 满足 (5.3.2)$\Longleftrightarrow$ 对 $0<r<R<\infty$, $\displaystyle\int_{r\leqslant|x|\leqslant R}K(x)dx=0$.

因此由定理 5.3.5, 只需验证 $K(x)=\frac{\Omega(x)}{|x|^n}$ 满足 Hömander 条件 (5.3.19). 记

$$\begin{aligned}K(x-y)-K(x)&=\frac{\Omega(x-y)-\Omega(x)}{|x-y|^n}+\Omega(x)\left(\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right)\\&:=I_1+I_2.\end{aligned}$$

注意到当 $0<\theta<1$ 及 $|x|\geqslant 2|y|$ 时, 有

$$|x-\theta y|\leqslant|x|+|y|\leqslant\frac{3}{2}|x| \quad 及 \quad |x-y|\geqslant|x|-|y|\geqslant\frac{1}{2}|x|.$$

因此

$$\left|\frac{1}{|x-y|^n}-\frac{1}{|x|^n}\right|\leqslant C\frac{|y||x-\theta y|^{n-1}}{|x-y|^n|x|^n}\leqslant C\frac{|y|}{|x|^{n+1}}. \tag{5.3.27}$$

另一方面, 当 $|x|\geqslant 2|y|$ 时

$$\left|\frac{x-y}{|x-y|}-\frac{x}{|x|}\right|\leqslant 2\frac{|y|}{|x|}. \tag{5.3.28}$$

这样由 (5.3.27) 和 (5.3.28) 知当 $|x|\geqslant 2|y|$ 时,

$$\begin{aligned}|K(x-y)-K(x)|&\leqslant\left|\Omega\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)-\Omega\left(\frac{x}{|x|}\right)\right||x-y|^{-n}\\&\quad+C\|\Omega\|_\infty|y||x|^{-(n+1)}\\&\leqslant C'\omega_\infty\left(\frac{2|y|}{|x|}\right)|x|^{-n}+C\|\Omega\|_\infty|y||x|^{-(n+1)}.\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

因此由 (5.3.29) 得到

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant 2|y|}|K(x-y)-K(x)|dx&\leqslant C'\int_{|x|\geqslant 2|y|}\omega_\infty\left(2\frac{|y|}{|x|}\right)\frac{dx}{|x|^n}+C''\|\Omega\|_\infty\\&=C'\int_{2|y|}^\infty\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\omega_\infty\left(2\frac{|y|}{r}\right)dx'\frac{dr}{r}+C''\|\Omega\|_\infty\\&\leqslant C'\int_0^1\frac{\omega_\infty(\delta)}{\delta}d\delta+C''\|\Omega\|_\infty\leqslant B.\end{aligned}$$

□

如记 $\Omega_j(x)=\frac{x_j}{|x|}\,(1\leqslant j\leqslant n)$, 那么易知 Ω_j 满足 L^∞-Dini 条件. 从而由定理 5.3.6 得

推论 5.3.7 Riesz 变换 R_j 为 (p,p) 型 $(1<p<\infty)$ 和弱 $(1,1)$ 型算子.

接下来我们将说明，在定理 5.3.6 的条件下，T_Ω 不仅是截断算子族 $\{T_{\Omega,\varepsilon}\}$ 的 L^p 极限 $(1<p<\infty)$ 或依测度意义下的极限 $(p=1)$, 而且也是 $\{T_{\Omega,\varepsilon}\}$ 在几乎处处意义下的极限. 为此需要研究截断算子族 $\{T_{\Omega,\varepsilon}\}$ 的极大算子 T_Ω^* 的有界性问题, 这里 T_Ω^* 定义为 $T_\Omega^*f(x)=\sup\limits_{\varepsilon>0}|T_{\Omega,\varepsilon}f(x)|$. T_Ω^* 也称为极大奇异积分算子.

下面的引理表明，在一定的条件下，T_Ω^* 能被 Hardy-Littlewood 极大算子点态控制.

引理 5.3.8 (Cotlar 不等式) 如 Ω 满足 (5.3.1), (5.3.2) 及 L^∞-Dini 条件 (5.3.26)，那么存在常数 $C_1,C_2>0$ 使得对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1<p<\infty)$ 及 $x\in\mathbb{R}^n$,

$$T_\Omega^*f(x)\leqslant C_1M(T_\Omega f)(x)+C_2Mf(x), \tag{5.3.30}$$

其中 M 为 Hardy-Littlewood 极大算子.

证明 记 $K(x)=|x|^{-n}\Omega(x)$ 及 $K_\varepsilon(x)=|x|^{-n}\Omega(x)\chi_{\{|x|\geqslant\varepsilon\}}(x)\,(\varepsilon>0)$. 取非负的径向函数 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 使得 $\operatorname{supp}(\varphi)\subset\{x:|x|\leqslant1\}$ 且 $\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)dx=1$. 进一步还可要求 $\varphi(|x|)$ 关于 $|x|$ 递减.

令 $\Phi(x)=K*\varphi(x)-K_1(x)$. 如对 $\varepsilon>0$, 记 $\Phi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ 及 $\varphi_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, 那么

$$\Phi_\varepsilon(x)=\varphi_\varepsilon*K(x)-K_\varepsilon(x). \tag{5.3.31}$$

由 (5.3.31), 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$

$$T_{\Omega,\varepsilon}f(x)=K_\varepsilon*f(x)=(\varphi_\varepsilon*K)*f(x)-\Phi_\varepsilon*f(x). \tag{5.3.32}$$

另一方面，对 $\eta>0$ 和 $x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$(\varphi_\varepsilon*K_\eta)*f(x)=\varphi_\varepsilon*(K_\eta*f)(x)=\varphi_\varepsilon*(T_{\Omega,\eta}f)(x).$$

视 $\varphi_\varepsilon\in L^{p'}$, 那么当 $\eta\to0$ 时, $\varphi_\varepsilon*K_\eta$ 依 L^p 范数收敛至 $\varphi_\varepsilon*K$ 而 $T_{\Omega,\eta}f$ 依 L^p 范数收敛至 $T_\Omega f$, 这样 $(\varphi_\varepsilon*K)*f(x)=\varphi_\varepsilon*(T_\Omega f)(x)$. 此式连同 (5.3.32) 得到

$$T_{\Omega,\varepsilon}f(x)=\varphi_\varepsilon*(T_\Omega f)(x)-\Phi_\varepsilon*f(x). \tag{5.3.33}$$

现说明 Φ 能被一个径向可积函数控制. 如 $|x|<1$, 那么

$$\Phi(x)=\varphi*K(x)=\int_{\mathbb{R}^n}[\varphi(x-y)-\varphi(x)]K(y)dy.$$

注意到 $K(y)=|y|^{-n}\Omega(y)$, $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 及 $\mathrm{supp}\varphi\subset\{x:|x|\leqslant 1\}$，故当 $|x|<1$ 时, Φ 是有界的. 同样，当 $1\leqslant|x|\leqslant 2$ 时, Φ 仍有界. 如 $|x|>2$, 则

$$\Phi(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x-y)\varphi(y)dy-K(x)=\int_{|y|\leqslant 1}[K(x-y)-K(x)]\varphi(y)dy.$$

因 $|x|>2\geqslant 2|y|$, 由 (5.3.29) 知

$$|K(x-y)-K(x)|\leqslant C'|x|^{-n}\cdot\omega_\infty\left(\frac{2}{|x|}\right).$$

这样 $|\Phi(x)|\leqslant C'|x|^{-n}\omega_\infty(\frac{2}{|x|})$. 综上可知, Φ 的递减径向控制函数 $\Psi(x)=\sup\limits_{|y|\geqslant|x|}|\Phi(y)|$ 必然是可积的. 这样由 (5.3.33) 并应用定理 1.3.6 得到 (5.3.30). □

定理 5.3.9 如 Ω 满足 (5.3.1)(5.3.2) 及 L^∞-Dini 条件 (5.3.26)，那么极大奇异积分算子 T_Ω^* 是 (p,p) 型 $(1<p<\infty)$ 和弱 (1,1) 型算子.

证明 由 Cotlar 不等式 (5.3.30) 及 Hardy-Littlewood 极大算子 M 和奇异积分算子 T_Ω 的 (p,p) 有界性（见定理 1.2.7 和定理 5.3.6）可得 T_Ω^* 的 (p,p) 有界性. 下面仅说明 T_Ω^* 为弱 (1,1) 型的，其证明思想类似于定理 5.1.12 的证明.

对任意的 $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ 及 $\lambda>0$, 由 Calderón-Zygmund 分解（定理 5.1.8）, 存在 $\mathbb{R}^n$ 中内部两两不交的方体列 $\{Q_j\}$ 及 $f=g+b$, 使得

$$\begin{aligned}|\{x\in\mathbb{R}^n:T_\Omega^*f(x)>\lambda\}|\ &\leqslant\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:T_\Omega^*g(x)>\tfrac{\lambda}{2}\right\}\right|\\&\quad+\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:T_\Omega^*b(x)>\tfrac{\lambda}{2}\right\}\right|.\end{aligned}\tag{5.3.34}$$

因 $\|g\|_2^2\leqslant C\lambda\|f\|_1$ 且 T_Ω^* 是 $(2,2)$ 型算子, 得到

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:T_\Omega^*g(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\leqslant C'\lambda^{-2}\|T_\Omega^*g\|_2^2\leqslant C''\frac{1}{\lambda}\|f\|_1.\tag{5.3.35}$$

记 Q_j 的中心为 y_j, Q_j 的边长为 d_j, 并令 $S_j=\sqrt{n}Q_j$ 及 $E=\bigcup_j S_j$. 这样

$$|E|\leqslant\sum_j|S_j|=\sum_j C_n|Q_j|\leqslant\frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1.$$

由此得到

$$\left|\left\{x\in\mathbb{R}^n:T_\Omega^*b(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|\leqslant\frac{C_n}{\lambda}\|f\|_1+\left|\left\{x\in E^c:T_\Omega^*b(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|.\tag{5.3.36}$$

取定 $x\in E^c$ 及 $\varepsilon>0$, 则

$$T_{\Omega,\varepsilon}b(x)=\sum_j\int_{Q_j}K_\varepsilon(x-y)b(y)dy.$$

那么对每一个 Q_j, 下面三种情况之一必然出现:

(a) $B(x,\varepsilon)\cap Q_j = Q_j$;

(b) $\overline{B(x,\varepsilon)}\cap Q_j = \varnothing$;

(c) 存在 $y\in Q_j$, 使得 $|x-y|=\varepsilon$.

对情况 (a), 有 $K_\varepsilon(x-y)=0$, 故 $T_{\Omega,\varepsilon}b(x)=0$. 对情况 (b), 有 $K_\varepsilon(x-y)=K(x-y)$, 这样

$$\left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy\right| = \left|\int_{Q_j}[K(x-y)-K(x-y_j)]b_j(y)dy\right|$$
$$\leqslant \int_{Q_j}|K(x-y)-K(x-y_j)||b_j(y)|dy.$$

至于情况 (c), 注意到 $x\in E^c\subset S_j^c$, 则存在仅与 n 有关的常数 $0<C_n'<1<C_n$ 使得 $Q_j\subset B(x,C_n\varepsilon)$. 同时亦有 $B(x,C_n'\varepsilon)\cap Q_j=\varnothing$. 这样, 对任意的 $y\in Q_j$,

$$|K_\varepsilon(x-y)|\leqslant \frac{|\Omega(x-y)|}{|x-y|^n}\leqslant \|\Omega\|_\infty (C_n'\varepsilon)^{-n}.$$

记 $r=C_n\varepsilon$, 那么

$$\left|\int_{Q_j} K_\varepsilon(x-y)b_j(y)dy\right| \leqslant \int_{Q_j\cap B(x,r)}|K_\varepsilon(x-y)||b(y)|dy$$
$$\leqslant C'\|\Omega\|_\infty\varepsilon^{-n}\int_{B(x,r)}|b(y)|dy \leqslant C''\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|b(y)|dy.$$

现对所有的方体求和得

$$|T_{\Omega,\varepsilon}b(x)|\leqslant \sum_j\int_{Q_j}|K(x-y)-K(x-y_j)||b_j(y)|dy \quad + \frac{C''}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|b(y)|dy.$$

因此

$$T_\Omega^* b(x)\leqslant \sum_j\int_{Q_j}|K(x-y)-K(x-y_j)||b(y)|dy + CMb(x),$$

这里 M 记 Hardy-Littlewood 极大算子. 这样

$$\left|\left\{x\in E^c: T_\Omega^* b(x)>\frac{\lambda}{2}\right\}\right|$$
$$\leqslant \left|\left\{x\in E^c: \sum_j\int_{Q_j}|k(x-y)-K(x-y_j)||b(y)|dy>\frac{\lambda}{4}\right\}\right|$$
$$+\left|\left\{x\in E^c: CMb(x)>\frac{\lambda}{4}\right\}\right|.$$

由 (5.3.23) 和 M 的弱 (1, 1) 有界性得

$$\left|\left\{x \in E^c : T_\Omega^* b(x) > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant \frac{C'}{\lambda}\|f\|_1.$$

此不等式连同 (5.3.34)~(5.3.36), 便说明 T_Ω^* 是弱 (1,1) 型的. □

推论 5.3.10 如 Ω 满足 (5.3.1)(5.3.2) 及 L^∞-Dini 条件 (5.3.26), 那么对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = T_\Omega f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 其中 T_Ω 由定理 5.3.6 结论 (b) (c) 所确定.

证明 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, 令

$$\Lambda(f)(x) = \left|\limsup_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) - \liminf_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x)\right|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

则 $\Lambda(f)(x) \leqslant 2T_\Omega^* f(x)$. 对任意的 $\delta > 0$, 记 $f = g + h$ 使得 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且 $\|h\|_p < \delta$. 由于 Ω 满足消失条件 (5.3.2) 并注意到 g 具有紧子集, 因此当 $\varepsilon \to 0$ 时, $T_{\Omega,\varepsilon} g$ 一致收敛于 $T_\Omega g$. 故 $\Lambda(g)(x) = 0$. 这样, 对于 $1 < p < \infty$,

$$\|\Lambda(f)\|_p \leqslant \|\Lambda(h)\|_p \leqslant 2A_p\|h\|_p \leqslant 2A_p\delta.$$

由 δ 的任意性得出, $\Lambda(f)(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 因此对 a.e. $x \in \mathbb{R}^n$, 极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ 存在.

当 $p = 1$ 时, 对任意的 $\lambda > 0$, 有

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda(f)(x) > \lambda\}| \leqslant \frac{2A}{\lambda}\|h\|_1 \leqslant \frac{2A\delta}{\lambda}.$$

从而仍有 $\Lambda(f)(x) = 0$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 故极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ 在几乎处处的意义下仍存在. 最后, 上述事实结合定理 5.3.6 的结论 (b) 和 (c) 便知推论成立. □

在定理 5.2.7 中, 我们运用旋转方法给出了极大 Riesz 变换 R_j^* 的 (p,p) 有界性 $(1 < p < \infty)$. 作为定理 5.3.9 的特殊情形, 有如下推论:

推论 5.3.11 对 $1 \leqslant j \leqslant n$, 极大 Riesz 变换 R_j^* 为弱 (1,1) 型算子.

下面我们将说明定理 5.3.6 的条件可以减弱. 显然, 如记 $K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$, 那么条件 (5.3.17) 等价于 $\Omega \in L^\infty(S^{n-1})$, 即有

$$\Omega \in L^\infty(S^{n-1}) \Longleftrightarrow |K(x)| \leqslant A_1|x|^{-n}.$$

另一方面, 如 $K(x) = \frac{\Omega(x')}{|x|^n}$, 那么

$$\Omega \in L^1(S^{n-1}) \Longleftrightarrow \sup_{R>0}\int_{R\leqslant|x|\leqslant 2R} |K(x)|dx \leqslant A_1'.$$

注意到 $L^\infty(\mathbb{S}^{n-1}) \subsetneq L^q(\mathbb{S}^{n-1})\,(1 \leqslant q < \infty)$, 故上述事实及[注 5.3.5]启示我们，可以在比定理 5.3.6 的条件更弱的情况下，获得齐型核奇异积分算子 T_Ω 的 L^p 有界性和弱 (1,1) 有界性. 先给出 L^q-Dini 条件的定义.

定义 5.3.1 对 $1 \leqslant q \leqslant \infty$, 说 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数 $\Omega(x')$ 满足 L^q-Dini 条件, 如：

(i) $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{n-1})$;

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\omega_q(\delta)}{\delta} d\delta < \infty.$

这里 $\omega_q(\delta)$ 称为 Ω 的 L^q 积分连续模，其定义为：对 $0 < \delta \leqslant 1$,

$$\omega_q(\delta) = \sup_{\|\rho\|<\delta} \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(\rho x') - \Omega(x')|^q \, dx' \right)^{1/q}, \quad 1 \leqslant q < \infty$$

及

$$\omega_\infty(\delta) = \sup_{\|\rho\|<\delta} |\Omega(\rho x') - \Omega(x')|,$$

其中 ρ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的旋转，$\|\rho\| = \sup\left\{|\rho x' - x'| : x' \in S^{n-1}\right\}$.

[注 5.3.7] 很明显，当 $1 \leqslant r < q \leqslant \infty$ 时, 如 Ω 满足 L^q-Dini 条件，那么 Ω 也满足 L^r-Dini 条件.

定理 5.3.6 给出了当 Ω 满足 L^∞-Dini 条件时齐型核奇异积分算子 T_Ω 的 $L^p\,(1 < p < \infty)$ 有界性和弱 (1,1) 有界性. 下面说明 L^∞-Dini 条件被更弱的 L^q-Dini 条件 $(1 \leqslant q < \infty)$ 替代后，仍保证 T_Ω 是 L^p 有界和弱 (1,1) 有界的. 先给出两个重要结论，它们表明 L^1-Dini 条件和 Hömander 条件 (5.3.19) 本质上等价.

引理 5.3.12 设 Ω 满足 (5.3.1) 和 (5.3.2), $K(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$. 那么

(a) 如果 Ω 满足 L^1-Dini 条件, 则 $\Omega \in L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1})$ 且 K 满足 Hömander 条件;

(b) 如果 K 满足 Hömander 条件, 则 $\Omega \in L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1})$ 且满足 L^1-Dini 条件.

[注 5.3.8] 结论 (a) 由 A. P. Calderón, M. Weiss 和 A. Zygmund 在 1967 年证明 [16], 而结论 (b) 由 A. P. Calderón 和 A. Zygmund 在 1979 年证明 [19].

定理 5.3.13 设 Ω 满足 (5.3.1) 和 (5.3.2) 及 L^q-Dini 条件 $(1 \leqslant q < \infty)$. 那么齐型核奇异积分算子 T_Ω 是 (p,p) 型 $(1 < p < \infty)$ 和弱 (1,1) 型算子.

证明 只需考虑 $q = 1$ 的情形（见 [注 5.3.7]）. 由引理 5.3.12 知，$\Omega \in L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1})$ 且 $K(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$ 满足 Hömander 条件 (5.3.19). 应用推论

5.3.3 得 T_Ω 是 $(2,2)$ 型的. 又由定理 5.3.5 的证明过程可推出 T_Ω 是弱 (1,1) 型算子（见 [注 5.3.5]）. 再运用 Marcinkiewicz 算子内插定理和对偶方法（亦见定理 5.3.5(a) 的证明），便可知算子 T_Ω 是 (p,p) 型和弱 (1,1) 型算子. □

[注 5.3.9] 在定理 5.3.13 的条件下，齐型核极大奇异积分算子 T_Ω^* 也是 L^p $(1<p<\infty)$ 有界和弱 (1,1) 有界的. 因此在相同的条件下，对于 $f \in L^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = T_\Omega f(x)$, a.e. $x \in \mathbb{R}^n$. 特别地，此结论对经典 Calderón-Zygmund 奇异积分算子成立（见引理 5.3.12(b)）.

§5.3.4 具非光滑核的奇异积分算子的 L^p 有界性 *

定理 5.3.13 表明在很弱的条件下, 齐型核奇异积分算子 T_Ω 是 L^p 和弱 $(1,1)$ 有界的. 然而 L^q-Dini 条件仍反映了 Ω 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上一定的光滑性质. 另一方面, 注意到推论 5.3.3 和推论 5.3.4 中所讨论的 $(2,2)$ 型奇异积分算子 T_Ω 的核函数 Ω 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上均没有任何光滑性. 因此一个自然的问题是：当 $p \neq 2$ 时, 推论 5.3.3 和推论 5.3.4 的结论是否仍成立? 称核函数 Ω 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上没有任何光滑性的奇异积分算子 T_Ω 为非光滑核奇异积分算子 (也称带粗糙核的奇异积分算子). 这样上述问题亦可表述为: 非光滑核奇异积分算子 T_Ω 是否为 $L^p\,(1<p<\infty)$ 和弱 (1,1) 有界的? 研究表明, 当 Ω 满足一定尺寸条件时, 上述问题的回答是肯定的.

下面我们运用 §5.2.2 中介绍的 Calderón-Zygmund 旋转方法将带奇核的奇异积分算子 (见 [注 5.3.3]) 的 L^2 有界性 (推论 5.3.4) 开拓为 L^p 有界性 $(1<p<\infty)$.

定理 5.3.14 设 $1<p<\infty$, T_Ω 为带奇核的奇异积分算子. 那么：

(a) T_Ω 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有定义且为 (p,p) 型算子；

(b) T_Ω^* 亦为 (p,p) 型算子；

(c) 对 $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $T_\Omega f(x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_{\Omega,\varepsilon} f(x)$ a.e. $x \in \mathbb{R}^n$.

证明 由引理 5.3.1 知奇异积分算子 T_Ω 在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 上是有定义的. 先考虑 $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 的情形. 运用球坐标变换以及 Ω 在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的奇性 (5.3.15) 得到

$$T_{\Omega,\varepsilon} f(x) = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') H_{y'}^{\varepsilon} f(x)\,dy',$$

这里 $H_{y'}^{\varepsilon}$ 为截断方向 Hilbert 变换（其定义见定理 5.2.6 的证明）. 由 $H_{y'}^*$ 的 $L^p\,(1<p<\infty)$ 有界性知

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(y')| H_{y'}^* f(x)\,dy' < \infty, \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

运用 Lebesgue 控制收敛定理得

$$T_\Omega f(x) = \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y')H_{y'}f(x)dy', \qquad \text{a.e. } x \in \mathbb{R}^n.$$

故应用定理 5.1.9 及旋转方法（命题 3.2.4）知 T_Ω 在 $\mathscr{S}\cap L^p(\mathbb{R}^n)$ 上是 (p,p) 型算子. 由 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中的稠密性, 并通过极限过程知 T_Ω 在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有定义且在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界.

另一方面, 容易看出, 对 $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$,

$$|T_\Omega^* f(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(y')|H_{y'}^* f(x)dy'.$$

由此式及定理 5.1.12 说明 T_Ω^* 亦为 (p,p) 型算子. 最后, 应用算子族的点态收敛性（定理 1.2.8）得到结论 (c). □

[注 5.3.9] 带奇核的奇异积分算子不是 (1,1) 型算子（例如, Hilbert 变换就不是 (1,1) 型算子）. 然而, 带奇核的奇异积分算子是否为弱 (1,1) 型算子, 是一个至今尚未解决的问题.

[注 5.3.10] 如 Ω 仅满足 (5.3.1)~(5.3.3), 而不满足奇性条件 (5.3.15), 那么定理 5.3.14 的结论不再成立. 这说明在上述情况下, 对于奇异积分算子 T_Ω 的 L^p 有界性而言, $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的可积函数空间显得过大. 因此寻找 $L^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 的子空间 K, 以保证相应于 K 中函数 Ω 的奇异积分算子 T_Ω 的 L^p 有界性便成为十分重要且非常有意义的问题.

注意到对于 $\Omega\in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$, 总有如下的分解:

$$\Omega(x') = \frac{\Omega(x')+\Omega(-x')}{2} + \frac{\Omega(x')-\Omega(-x')}{2} := \Omega_e(x') + \Omega_o(x'), \quad x' \in \mathbb{S}^{n-1},$$

其中 Ω_e, Ω_o 分别为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积的偶函数和奇函数. 因此对于一般奇异积分算子 T_Ω 的 L^p 有界性的讨论便归结为带偶核的奇异积分算子（定义见 [注 5.3.3]）的 L^p 有界性问题.

早在 1956 年, A.P.Calderón 和 A.Zygmun [18] 便考虑了这个问题. 对于 T_Ω 为带偶核的奇异积分算子, 由于不能通过方向 Hilbert 变换的积分来表达 T_Ω, 故不能直接运用旋转方法导出 T_Ω 的 L^p 有界性. Calderón 和 Zygmun 的基本思想是:

(i) 运用等式 (5.2.15), 写

$$T_\Omega = -\sum_{j=1}^n R_j^2(T_\Omega) = -\sum_{j=1}^n R_j(T_\Omega R_j); \tag{5.3.37}$$

(ii) 验证复合算子 $T_\Omega R_j$ 的核为奇核 (这可由 Riesz 变换 R_j 是奇核及 T_Ω 为偶核得到);

(iii) 通过加强 Ω 的尺寸条件 (由 [注 5.3.10] 这是必须的), 验证复合算子 $T_\Omega R_j$ 的核函数在 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上可积, 并运用定理 5.3.5 得到复合算子 $T_\Omega R_j$ 的 L^p 有界性;

(iv) 最后由 (5.3.37) 及 Riesz 变换的 L^p 有界性得到 T_Ω 的 L^p 有界性.

基于上述思想, Calderón 和 Zygmun [18] 证明了下面的结果:

定理 5.3.15 设 Ω 满足零阶齐次条件 (5.3.1) 和消失条件 (5.3.2). 如 $\Omega \in L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1})$, 那么对 $1 < p < \infty$, 奇异积分算子 T_Ω 为 (p,p) 型算子.

定理 5.3.15 及极大奇异积分算子 T_Ω^* 为 (p,p) 型算子的证明亦可见 [32].

1979 年, W. Connett [22] 以及 F. Ricci 和 G. Weiss [41] 分别独立地改进了上述结果:

定理 5.3.16 设 Ω 满足零阶齐次和消失条件. 如 Ω 为 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 中的函数, 那么对 $1 < p < \infty$, T_Ω 为 (p,p) 型算子.

1997 年, D. Fan 和 Y. Pan [26] 进一步证明了, 在定理 5.3.16 的条件下, 其极大奇异积分算子 T_Ω^* 亦为 (p,p) 型算子.

有关 Hardy 空间 $H^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 的定义及上述结论的证明亦可见 [37].

[注 5.3.11] 定义于 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的函数空间有如下的包含关系:

$$\begin{aligned} L^\infty(\mathbb{S}^{n-1}) &\subsetneq L^q(\mathbb{S}^{n-1})\,(1 < q < \infty) \\ &\subsetneq L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1}) \subsetneq H^1(\mathbb{S}^{n-1}) \subsetneq L^1(\mathbb{S}^{n-1}). \end{aligned}$$

最后, 我们给出非光滑核奇异积分算子 T_Ω 的弱 (1,1) 型结果, 它被 A. Seeger 在 1996 年所证明 [44]:

定理 5.3.17 设 Ω 满足零阶齐次条件和消失条件. 如 $\Omega \in L\log^+L(\mathbb{S}^{n-1})$, 那么奇异积分算子 T_Ω 为弱 $(1,1)$ 型算子.

[注 5.3.12] 当 Ω 满足零阶齐次和消失条件, 且 $\Omega \in H^1(\mathbb{S}^{n-1})$ 时, 奇异积分算子 T_Ω 是否为弱 $(1,1)$ 型算子, 是个至今仍未解决的问题.

习 题 五

1. 设 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. 证明: $H\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ 当且仅当 $\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx = 0$.

2. 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $xf \in L^2(\mathbb{R})$, 且 $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 0$. 证明: $Hf \in L^1(\mathbb{R})$.

3. 证明: 对任意的 $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, 有

(a) 如 f 为实值函数, 那么 $\langle f, Hf \rangle = 0$;

(b) $H(f * g) = f * Hg = Hf * g$.

4. 证明: $L^p(\mathbb{R})\,(1 \leqslant p < \infty)$ 中奇 (偶) 函数的 Hilbert 变换为偶 (奇) 函数.

5. 设 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. 证明:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = R_j(R_1 - iR_2)\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right), \quad j = 1, 2;$

(ii) $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right\|_p + \left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p \leqslant A_p\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x_1} + i\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right\|_p, \quad 1 < p < \infty.$

6. 证明推论 5.3.2.

7. 设 Ω 满足 (5.3.1) 及 (5.3.3). 对 $\varepsilon > 0$ 及 $f \in L^p(\mathbb{R})\,(1 < p \leqslant \infty)$, 定义算子 T 如下:

$$Tf(x) = \int_{|x-y|<1} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^{n-\varepsilon}} f(y)dy.$$

证明: T 为 (p,p) 型算子 $(1 < p \leqslant \infty)$.

8. 设 Ω 非零并满足 (5.3.1)~(5.3.3). 证明: 如果 $f \geqslant 0$ 且 $\|f\|_1 > 0$, 那么 $T_\Omega f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, 其中 T_Ω 是奇异积分算子.

9. 设 Ω 满足 (5.3.1)~(5.3.3). 证明: 如果奇异积分算子 T_Ω 是 L^p 到 L^q 有界的 $(1 < p, q < \infty)$, 那么 $p = q$.

10. 证明: 条件 (5.3.17)$'$ 与下面等价:

$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|x| \leqslant R} |xK(x)|dx \leqslant A_1''. \tag{5.3.17$''$}$$

从而, 如将 Calderón-Zygmund 核的条件中 (5.3.17) 替换为 (5.3.17)$''$, 定理 5.3.5 的结论仍然成立.

第六章　小波分析初步

自 1985 年 Meyer 基 (见 [38][35]) 产生至今，小波分析在理论和应用方面均得以迅速发展，现已被广泛应用于数值分析、信号处理、图像处理、语音识别、地震和石油勘探等领域. 在这一章我们将介绍小波分析的基本理论.

§6.1　基本小波与小波变换

§6.1.1　基本小波

定义 6.1.1 称 $\mathbb{R}$ 上定义的函数 ψ 为一个基本小波，如果它满足以下条件：

(a) $\psi \in L^2(\mathbb{R})$;

(b) (容许条件) $C_\psi =: \int_{\mathbb{R}} |\hat{\psi}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|} < \infty.$

[注 6.1.1] 如果基本小波 $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, 那么由 $\hat{\psi}(\xi)$ 在零点的连续性及容许条件 (b) 知必有 $\int \psi(x)dx = \hat{\psi}(0) = 0$.

下面给出基本小波的几个例子.

例 6.1.1 如下定义的 Haar 函数 h 是一个基本小波：

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2), \\ -1, & x \in [1/2, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1). \end{cases}$$

事实上，$h \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, 故 h 的 Fourier 变换为:

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \int_0^{1/2} e^{-2\pi i\xi x}dx - \int_{1/2}^1 e^{-2\pi i\xi x}dx \\ &= \frac{e^{-i\pi\xi} - 1}{-2\pi i\xi} - \frac{e^{-2\pi i\xi} - e^{-i\pi\xi}}{-2\pi i\xi} \\ &= \frac{(1 - e^{-i\pi\xi})^2}{2\pi i\xi}. \end{aligned}$$

显然容许条件 (b) 亦满足.

例 6.1.2 Gaussian 小波 $\psi(x)=Cxe^{-\pi x^2}$ 是一个基本小波.

事实上，易知 $\hat{\psi}(\xi)=-iC\xi e^{-\pi\xi^2}$. 从而条件 (a) 和 (b) 均满足. 注意到

$$\int_{\mathbb{R}}|\hat{\psi}(\xi)|^2\frac{d\xi}{|\xi|}=2C^2\int_0^\infty \xi e^{-2\pi\xi^2}d\xi=C^2/2\pi,$$

因此如取 $C=\sqrt{2\pi}$, 则有 $C_\psi=1$.

例 6.1.3 墨西哥帽小波 ψ 由其 Fourier 变换 $\hat{\psi}(\xi)=C\xi^2e^{-\pi\xi^2}$ 所定义. 显然墨西哥帽小波 ψ 是一个基本小波. 直接计算，可知 $\psi(x)=C(1/2\pi-x^2)e^{-\pi x^2}$. 特别地，如取 $C=2\pi$, 那么 $C_\psi=1$.

[注 6.1.2] Gaussian 小波和墨西哥帽小波本质上分别是 Gaussian 函数 $e^{-\pi x^2}$ 的一阶和二阶导数.

§6.1.2 连续小波变换

定义 6.1.2 设 ψ 为基本小波且 $f\in L^2(\mathbb{R})$. 那么 f 关于 ψ 的连续小波变换定义为:

$$W_\psi f(a,b)=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi_{a,b}(x)}dx, \tag{6.1.1}$$

其中 $a,b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$,

$$\psi_{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\psi(\frac{x-b}{a}). \tag{6.1.2}$$

定理 6.1.1 设 ψ 为基本小波且 $f\in L^2(\mathbb{R})$. 那么连续小波变换 $W_\psi f(a,b)$ 满足如下性质:

(a) (可加性) 设 $f_1,f_2\in L^2(\mathbb{R})$ 且 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, 那么 $W_\psi f(a,b)=W_\psi f_1(a,b)+W_\psi f_2(a,b)$;

(b) (平移) 设 $g(x)=f(x-c)$, 那么 $W_\psi g(a,b)=W_\psi f(a,b-c)$;

(c) (伸缩) 设 $g(x)=f(cx)$, 那么 $W_\psi g(a,b)=|c|^{-1/2}W_\psi f(a/c,bc)$;

(d) (小波变换的 Parseval 等式) 如 $g\in L^2(\mathbb{R})$, 那么

$$\iint_{\mathbb{R}^2}W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}\frac{dadb}{a^2}=C_\psi\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{g(x)}dx. \tag{6.1.3}$$

特别地，对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$

$$\iint_{\mathbb{R}^2}|W_\psi f(a,b)|^2\frac{dadb}{a^2}=C_\psi\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^2dx. \tag{6.1.4}$$

证明 仅证结论 (d). 首先说明对 a.e. $a \in \mathbb{R}$, $W_\psi f(a,\cdot) \in L^2(\mathbb{R})$. 注意到 $\widehat{\psi_{a,b}}(\xi) = e^{-2\pi i b\xi}|a|^{1/2}\hat{\psi}(a\xi)$. 由 $L^2(\mathbb{R})$ 中 Fourier 变换的 Parseval 等式 (2.2.4) 得

$$W_\psi f(a,b) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i b\xi} |a|^{1/2}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}d\xi = \widehat{F_a}(-b),$$

其中 $F_a(\xi) = \hat{f}(\xi)|a|^{1/2}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}$. 由于

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} |F_a(\xi)|^2 d\xi\right)\frac{da}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\left(\int_{\mathbb{R}} |a||\hat{\psi}(a\xi)|^2\frac{da}{a^2}\right)d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(y)|^2}{|y|}dy\right)d\xi \\ &= C_\psi \|f\|_2^2 < \infty,\end{aligned}$$

故对 a.e. $a \in \mathbb{R}$, $F_a(\xi)$ 关于 ξ 平方可积. 由 Plancherel 定理 (定理 2.2.2) 和上式, 对 a.e. $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} |W_\psi f(a,b)|^2 db = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{F_a}(-b)|^2 db = \int_{\mathbb{R}} |F_a(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

现记 $G_a(\xi) = \hat{g}(\xi)|a|^{1/2}\overline{\hat{\psi}(a\xi)}$, 那么 $G_a \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $W_\psi g(a,b) = \widehat{G_a}(-b)$. 运用 Parseval 等式 (2.2.4) 得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}db &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{F_a}(-b)\overline{\widehat{G_a}(-b)}db \\ &= \int_{\mathbb{R}} F_a(\xi)\overline{G_a(\xi)}d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}|a||\hat{\psi}(a\xi)|^2 d\xi.\end{aligned} \tag{6.1.5}$$

在 (6.1.5) 两边关于 $\frac{da}{a^2}$ 作积分, 由 Fubini 定理并再次运用 Parseval 等式得

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}\frac{dadb}{a^2} &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\left(\int_{\mathbb{R}} |a||\hat{\psi}(a\xi)|^2\frac{da}{a^2}\right)d\xi \\ &= C_\psi \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi \\ &= C_\psi \iint_{\mathbb{R}^2} f(x)\overline{g(x)}dx.\end{aligned}$$

□

[注 6.1.3] 定理 6.1.1(d) 表明, 映射 $f \mapsto W_\psi f$ 是 $L^2(\mathbb{R}, dx)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^2, dadb/a^2)$ 的同构, 其中空间 $L^2(\mathbb{R}^2, dadb/a^2)$ 中的内积定义为:

$$\langle F, G\rangle =: \iint_{\mathbb{R}^2} F(a,b)\overline{G(a,b)}\frac{dadb}{a^2}.$$

下面给出连续小波变换的反演公式.

定理 6.1.2 设 ψ 为满足 $C_\psi = 1$ 的基本小波. 则对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 在 L^2 意义下有

$$\begin{aligned} f(x) &= \iint_{\mathbb{R}^2} W_\psi f(a,b)\psi_{a,b}(x)\frac{dadb}{a^2} \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A,B\to\infty}} \iint_{\substack{\varepsilon<|x|<A\\ |b|<B}} W_\psi f(a,b)\psi_{a,b}(x)\frac{dadb}{a^2}. \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

证明 记

$$S_{\varepsilon,A,B}f(x) = \iint_{\substack{\varepsilon<|x|<A\\ |b|<B}} W_\psi f(a,b)\psi_{a,b}(x)\frac{dadb}{a^2}.$$

那么对任意的 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 有

$$\begin{aligned} \langle S_{\varepsilon,A,B}f, g\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \left(\iint_{\substack{\varepsilon<|x|<A\\ |b|<B}} W_\psi f(a,b)\psi_{a,b}(x)\frac{dadb}{a^2} \right)\overline{g(x)}dx \\ &= \iint_{\substack{\varepsilon<|x|<A\\ |b|<B}} W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}\frac{dadb}{a^2}. \end{aligned}$$

这样由 (6.1.4) 式得

$$\begin{aligned} &|\langle f - S_{\varepsilon,A,B}f, g\rangle| \\ &= \left| \iint_{(\varepsilon<|x|<A,|b|<B)^c} W_\psi f(a,b)\overline{W_\psi g(a,b)}\frac{dadb}{a^2} \right| \\ &\leqslant \left(\iint_{(\varepsilon<|x|<A,|b|<B)^c} |W_\psi f|^2 \frac{dadb}{a^2} \right)^{1/2} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} |W_\psi g|^2 \frac{dadb}{a^2} \right)^{1/2} \\ &= \left(\iint_{(\varepsilon<|x|<A,|b|<B)^c} |W_\psi f|^2 \frac{dadb}{a^2} \right)^{1/2} \|g\|_2. \end{aligned} \tag{6.1.7}$$

注意到

$$\|f - S_{\varepsilon,A,B}f\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - S_{\varepsilon,A,B}f(x))\overline{g(x)}dx \right|,$$

由 (6.1.7) 并应用 Lebesgue 控制收敛定理知

$$\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ A,B\to\infty}} \|f - S_{\varepsilon,A,B}f\|_2 = 0.$$

□

下面的结果表明, 连续小波变换可被用于刻画 $L^2(\mathbb{R})$ 中函数的光滑性. 先给出一个记号. 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 及 $s > 0$, 称

$$\|f\|_{2,s} = \left(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

为 f 的 Sobolev 范数. 不难证明, 如果 $\|f\|_{2,s}<\infty$, 那么当 $k<s-1/2$ 时, f 具有 k 阶连续导数.

定理 6.1.3 设 ψ 为满足 $C_\psi=1$ 的基本小波. 如存在 $s>0$ 使得

$$C_{\psi,s}=:\int_{\mathbb{R}}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|^{1+2s}}d\xi<\infty.$$

那么

$$\iint_{\mathbb{R}^2}|W_\psi f(a,b)|^2\frac{dadb}{a^{2+2s}}=C_{\psi,s}\|f\|_{2,s}^2.$$

证明 在 (6.1.5) 中取 $f=g$ 并在其两边除以 a^{2+2s}, 再关于 a 两边积分得:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}|W_\psi f(a,b)|^2\frac{dadb}{a^{2+2s}}=\iint_{\mathbb{R}^2}|\hat{f}(\xi)|^2\frac{|\hat{\psi}(a\xi)|^2}{|a|^{1+2s}}dad\xi=C_{\psi,s}\|f\|_{2,s}^2. \qquad \square$$

§6.1.3 离散小波变换及小波框架

对小波变换作离散化处理, 无论在理论上还是应用方面都是重要的. 我们先引入二进小波及其变换.

定义 6.1.3 设 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$. 如存在常数 $0<A\leqslant B$, 使得:

$$A\leqslant\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2\leqslant B, \tag{6.1.8}$$

则称 ψ 为二进小波, 而条件 (6.1.8) 称为稳定性条件. 对 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 其关于 ψ 的二进小波变换定义为

$$\begin{aligned}W_\psi^k f(b)&=:f*\bar{\tilde{\psi}}_{2^{-k}}(b)\\&=2^k\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi(2^{-k}(x-b))}dx\\&=2^{k/2}W_\psi f(2^{-k},b),\end{aligned} \tag{6.1.9}$$

其中 $k\in\mathbb{Z}$, $b>0$, 且 $\psi_{2^k}(x)=2^{-k}\psi(2^{-k}x)$.

命题 6.1.4 (稳定性条件的基本性质)

(a) 稳定性条件等价于

$$A\|f\|_2^2\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}\|W_\psi f(2^{-k},\cdot)\|^2\leqslant B\|f\|_2^2,\quad f\in L^2(\mathbb{R}); \tag{6.1.10}$$

(b) 稳定性条件蕴含了每个二进小波必然是基本小波.

证明 由于 $\widehat{W_\psi^k f}(\xi)=\hat{f}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(2^{-k}\xi)$，故结论 (a) 由此可得. 另一方面，易知

$$\int_1^2 \frac{|\hat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2}{\xi}d\xi=\int_{2^{-j}}^{2^{-j+1}}\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}d\xi.$$

由 (6.1.8) 有

$$A\log 2\leqslant\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi}d\xi\leqslant B\log 2.$$

同理有

$$A\log 2\leqslant\int_0^\infty\frac{|\hat{\psi}(-\xi)|^2}{\xi}d\xi\leqslant B\log 2.$$

从而 (b) 获证. □

二进小波变换实际上是将小波变换的伸缩参数 a 进行了二进离散化. 下面讨论更一般的伸缩同时对平移参数 b 也进行离散化的情形. 取定常数 $a_0>1$, $b_0>0$，设 ψ 是一个基本小波. 考虑由 ψ 的伸缩和平移生成的小波函数系

$$\left\{\psi_{jk}:\psi_{jk}(x)=a_0^{j/2}\psi(a_0^jx-kb_0),\quad j,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}. \tag{6.1.11}$$

对 $f\in L^2(\mathbb{R})$ 及 $(j,k)\in\mathbb{Z}^2$, 其相应离散小波变换为

$$W_\psi f(a_0^j,kb_0a_0^{-j})=\int_{\mathbb{R}}f(x)\overline{\psi(a_0^jx-kb_0)}dx=\langle f,\psi_{jk}\rangle. \tag{6.1.12}$$

对于离散小波变换的反演，即通过 ψ_{jk} 和 $\langle f,\psi_{jk}\rangle$ 来表达 f 的问题，归结为小波框架的研究. 为此，先给出框架的定义及其性质.

定义 6.1.4 设 H 为 Hilbert 空间，$\{\varphi_j\}_{j\in J}\subset H$（$J$ 为可数集）. 如存在正数 A,B 使得对一切 $f\in H$ 有

$$A\|f\|_H^2\leqslant\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2\leqslant B\|f\|_H^2, \tag{6.1.13}$$

则称 $\{\varphi_j\}$ 为 H 的一个框架. 如 $A=B$, 则称 $\{\varphi_j\}$ 为 H 的一个紧框架. 此时，对一切 $f\in H$ 有

$$\sum_{j\in J}|\langle f,\varphi_j\rangle|^2=A\|f\|_H^2.$$

命题 6.1.5 (紧框架的基本性质) 设 $\{\varphi_j\}$ 为 Hilbert 空间 H 的一个紧框架，那么

(a) $f = \frac{1}{A}\sum_{j\in J}\langle f, \varphi_j\rangle\varphi_j$;

(b) 如还有 $A = 1$ 且 $\|\varphi_j\|_H = 1\,(j \in J)$, 则 $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ 为 H 的标准正交基.

证明 运用极化恒等式

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}\left\{\|f+g\|_H^2 - \|f-g\|_H^2 + i\|f+ig\|_H^2 - i\|f-ig\|_H^2\right\}$$

即可得 (a). 另一方面, 由结论 (a) 有

$$1 = \|\varphi_j\|_H^2 = \sum_{k\in J}|\langle\varphi_j, \varphi_k\rangle|^2 = \|\varphi_j\|_H^2 + \sum_{k\neq j}|\langle\varphi_j, \varphi_k\rangle|^2.$$

从而对一切 $k \neq j$, 均有 $\langle\varphi_j, \varphi_k\rangle = 0$. 此表明 $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ 为 H 的标准正交系. 又注意到对 $f \in H$ 及任意的 $j \in J$, 由 $\langle f, \varphi_k\rangle = 0$ 可得 $f = \theta$ (H 中的零元), 因而 $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ 还是完全的. □

[注 6.1.4] 现给出一例说明 Hilbert 空间 H 的紧框架不一定是 H 的标准正交基. 取 $H = \mathbb{R}^2$, $\varphi_1 = (0, 1)$, $\varphi_2 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $\varphi_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. 显然 $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ 不是 $\mathbb{R}^2$ 的标准正交基. 然而容易验证它确是 $\mathbb{R}^2$ 的一个紧框架.

定义 6.1.5 给定常数 $a_0 > 1, b_0 > 0$. 如果 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 且由 ψ 的伸缩和平移生成的函数系

$$\left\{\psi_{jk} : \psi_{jk}(x) = a_0^{j/2}\psi(a_0^j x - kb_0), \quad j, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots\right\} \tag{6.1.14}$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个框架, 则称 $\{\psi_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个小波框架. 此时, (6.1.13) 中的常数 A, B 分别称为此框架的下界和上界.

下面我们给出构成小波框架的必要和充分条件, 其证明均可见 [23].

定理 6.1.6 (构成小波框架的必要条件) 函数系 (6.1.14) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的以 A, B 分别为下界和上界小波框架的必要条件是

$$b_0 A\log a_0 \leqslant \int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2\frac{d\xi}{\xi} \leqslant b_0 B\log a_0 \tag{6.1.15}$$

及

$$b_0 A\log a_0 \leqslant \int_0^\infty |\hat{\psi}(-\xi)|^2\frac{d\xi}{\xi} \leqslant b_0 B\log a_0. \tag{6.1.16}$$

[注 6.1.5] 定理 6.1.6 表明, 为使函数系 (6.1.14) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的小波框架, ψ 必须满足容许条件, 即:

$$C_\psi =: \int_{\mathbb{R}}|\hat{\psi}(\xi)|^2\frac{d\xi}{|\xi|} < \infty.$$

此外, 如函数系 (6.1.14) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的紧框架, 那么

$$b_0 A\log a_0 = b_0 B\log a_0 = \int_0^\infty |\hat{\psi}(\xi)|^2\frac{d\xi}{\xi} = \int_0^\infty |\hat{\psi}(-\xi)|^2\frac{d\xi}{\xi}. \tag{6.1.17}$$

定理 6.1.7 (构成小波框架的充分条件) 设 $\psi\in L^2(\mathbb{R})$, 常数 $a_0>1$. 如果下面条件成立:

$$\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(a_0^j\xi)|^2>0; \tag{6.1.18}$$

$$\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(a_0^j\xi)|^2<\infty. \tag{6.1.19}$$

且存在 $\varepsilon>0$, 当 $s\to 0$ 时有

$$\beta(s)=\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(a_0^j\xi)||\hat{\psi}(a_0^j\xi+s)|=O(1+|s|)^{-(1+\varepsilon)}, \tag{6.1.20}$$

那么存在 $b_0^*>0$, 使得当 $0<b_0<b_0^*$ 时, 函数系 (6.1.14) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的小波框架. 此时该小波框架的上下界分别为:

$$A=\frac{1}{b_0}\left\{\inf_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(a_0^j\xi)|^2-\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}}\left[\beta\Big(\frac{2\pi}{b_0}k\Big)\beta\Big(-\frac{2\pi}{b_0}k\Big)\right]^{1/2}\right\},$$

$$B=\frac{1}{b_0}\left\{\sup_{1\leqslant|\xi|\leqslant a_0}\sum_{j\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(a_0^j\xi)|^2+\sum_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\k\neq 0}}\left[\beta\Big(\frac{2\pi}{b_0}k\Big)\beta\Big(-\frac{2\pi}{b_0}k\Big)\right]^{1/2}\right\}.$$

[注 6.1.5] 如果存在 $C,\alpha>0$ 且 $\gamma>1+\alpha$, 使得

$$|\hat{\psi}(\xi)|\leqslant C|\xi|^\alpha(1+|\xi|)^{-\gamma},\quad \xi\in\mathbb{R}, \tag{6.1.21}$$

那么此时 (6.1.19), (6.1.20) 成立. 从而条件 (6.1.18) 连同 (6.1.21) 亦是函数系 (6.1.14) 构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的小波框架的充分条件.

§6.2 Haar 小波的展开与收敛

作为例子, 前面已看到 Haar 函数 h 是个基本小波. 在这一节我们将进一步说明, Haar 函数 h 是一个正交小波.

定义 6.2.1 设 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. 如果函数系

$$\{\psi_{jk}: \psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k), \quad (j,k) \in \mathbb{Z}^2\}, \tag{6.2.1}$$

构成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个标准正交基, 则称 ψ 是一个正交小波.

由定义 6.2.1, 为证明 h 是一个正交小波, 只需说明函数系 $\{h_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中完全的标准正交系即可. 我们将分两个小节说明上述事实.

§6.2.1 Haar 函数系和 Haar 级数

命题 6.2.1 由 Haar 函数 h 通过 (6.2.1) 所生成的函数系 $\{h_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中一个标准正交系, 称为 Haar 函数系.

证明 需要说明

$$\langle h_{jk}, h_{j'k'}\rangle = \int_{\mathbb{R}} h_{jk}(x)h_{j'k'}(x)dx = \begin{cases} 1, & (j,k) = (j',k'), \\ 0, & (j,k) \neq (j',k'). \end{cases}$$

首先设 $j = j'$ 且 $k \neq k'$. 在此情况下

$$\int_{\mathbb{R}} h(2^j x - k)h(2^j x - k')dx = 2^{-j}\int_{\mathbb{R}} h(y)h(y + k - k')dy = 0.$$

当 $j < j'$ 且 $k \neq k'$ 时

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} h(2^j x - k)h(2^{j'} x - k')dx \\
&= 2^{-j}\int_{\mathbb{R}} h(y)h(2^{j'-j}y + 2^{j'-j}k - k')dy \\
&= 2^{-j}\left(\int_0^{1/2} h(2^{j'-j}y + k'')dy - \int_{1/2}^1 h(2^{j'-j}y + k'')dy\right) = 0.
\end{aligned}$$

最后, 如果 $(j,k) = (j',k')$, 那么

$$\int_{\mathbb{R}} |h_{j,k}(x)|^2 dx = 2^j \int_{\mathbb{R}} h^2(2^j x - k)dx = \int_{\mathbb{R}} h^2(x)dx = 1. \qquad \square$$

对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 其 Fourier-Haar 系数 c_{jk} 定义为:

$$c_{jk} =: C_{jk}(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)h_{jk}(x)dx, \quad j,k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \tag{6.2.2}$$

f 的 Haar 级数定义为

$$f(x) \sim \sum_{j,k} C_{jk}(f) h_{jk}(x). \tag{6.2.3}$$

由 $\{h_{jk}\}$ 的正交性和 Bessel 不等式得

$$\sum_{j,k} |C_{jk}(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty,$$

再由 $L^2(\mathbb{R})$ 的完备性便知 f 的 Haar 级数依 L^2 范数收敛.

§6.2.2 二进投影算子族和 Haar 级数的收敛

在这一小节，我们将说明 Haar 函数系 $\{h_{jk}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中是完全的. 只需说明，对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 在 L^2 的意义下 (6.2.3) 式中等号成立. 为此我们需要引进二进投影算子族 $\{P_n\}$. 首先给出 $\mathbb{R}$ 的二进剖分 $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$:

$$\mathcal{F}_n = \left\{ I_{kn} = \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

对 $n \in \mathbb{Z}$, 如下定义的算子 P_n 为从 $L^2(\mathbb{R})$ 到 $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{F}_n, dx)$ 的投影：对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$P_n(f)(x) = 2^n \int_{I_{kn}} f(y)dy, \quad x \in I_{kn}. \tag{6.2.4}$$

P_n 亦称为二进投影算子. 下面给出二进投影算子族 $\{P_n\}$ 的几个基本性质.

命题 6.2.2 (二进投影算子族 $\{P_n\}$ 的基本性质)

(a) 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$, $\|P_n\|_{(2,2)} \leqslant 1$, 即 $\{P_n\}$ 的算子范数一致有界；

(b) 如 $f \in C_0(\mathbb{R})$, 则 $\lim\limits_{m\to\infty} \|P_{-m}f\|_\infty = 0$;

(c) 如 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则 $\lim\limits_{m\to\infty} \|P_{-m}f\|_2 = 0$;

(d) 如 $f \in C_c(\mathbb{R})$, 则在一致收敛和 L^2 收敛意义下均有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n f = f$;

(e) 如 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 则在几乎处处和 L^2 收敛意义下均有 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n f = f$.

证明 (a) 的证明. 对 $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ 及 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 由 P_n 的定义，当 $x \in I_{kn}$ 时

$$|P_n(f)(x)|^2 \leqslant 2^n \int_{I_{kn}} |f(y)|^2 dy.$$

因此

$$\|P_n(f)\|_2^2 = \sum_k \int_{I_{kn}} |P_n(f)(x)|^2 dx \leqslant \sum_k \int_{I_{kn}} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2.$$

(b) 的证明. 首先设 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 且 $\operatorname{supp} g \subset [-K, K]$. 这样当 $2^m > K$ 且 $x \in [0, 2^m]$ 时,

$$|P_{-m}g(x)| \leqslant 2^{-m} \int_0^K |g(y)|dy \to 0 \quad (m \to \infty).$$

当 $x \in [-2^m, 0]$ 时, 亦有相同结论. 因此 $\|P_{-m}f\|_\infty \to 0 \quad (m \to \infty)$. 由于 $C_c(\mathbb{R})$ 在 $C_0(\mathbb{R})$ 中稠密, 对 $f \in C_0(\mathbb{R})$ 及 $\varepsilon > 0$, 取 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 并使 $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. 这样

$$\limsup_{m\to\infty} \|P_{-m}f\|_\infty \leqslant \limsup_{m\to\infty} \|P_{-m}(f-g)\|_\infty < \varepsilon.$$

这样证明了结论 (b).

(c) 的证明. 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\varepsilon > 0$, 取 $g \in C_c(\mathbb{R})$ 并使得 $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. 设 $\operatorname{supp} g \subset [-K, K]$. 那么当 $2^m > K$ 且 $-2^m \leqslant x \leqslant 2^m$ 时, 由结论 (a) 有下面的事实:

$$\begin{aligned}
|P_{-m}g(x)| &\leqslant 2^{-m} \int_{-K}^K |g(x)|dx \leqslant 2^{-m}(2K)^{1/2}\|g\|_2; \\
\|P_{-m}g\|_2 &\leqslant 2^{-m/2}(4K)^{1/2}\|g\|_2; \\
\|P_{-m}f\|_2 &\leqslant \|P_{-m}g\|_2 + \|P_{-m}(f-g)\|_2 \leqslant \|P_{-m}g\|_2 + \varepsilon.
\end{aligned}$$

再由结论 (b) 的证明可知 $\limsup_{m\to\infty} \|P_{-m}f\|_2 \leqslant \varepsilon$.

(d) 的证明. 如果 $f \in C_c(\mathbb{R})$, 不妨设 $\operatorname{supp} f \subset [-K, K]$ 且 $K \geqslant 1$. 对于 $\varepsilon > 0$, 由 f 的一致连续性, 存在 $\delta > 0$ 使得当 $|x - y| < \delta$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/K$. 如果 $2^{-n} < \delta$, 则对一切 x

$$|P_nf(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon/\sqrt{2K} < \varepsilon.$$

从而得到一致收敛性. 另一方面,

$$\int_{\mathbb{R}} |P_nf(x) - f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-K}^K \varepsilon^2/2K dx = \varepsilon^2.$$

这样证明了 (d). 最后, 由 $C_c(\mathbb{R})$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 运用 (d) 可得结论 (e). □

定理 6.2.3 设 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 那么在 L^2 收敛意义下有

$$f(x) = \sum_{j,k} C_{jk}(f)h_{jk}(x). \tag{6.2.5}$$

证明 首先证明, 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 及 $n \in \mathbb{Z}$ 有

$$P_{n+1}f - P_nf = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{nk}(f)h_{nk}(x). \tag{6.2.6}$$

为此定义 Haar 尺度函数:

$$\phi(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,1),\\ 0, & x\notin[0,1).\end{cases} \tag{6.2.7}$$

那么二进投影算子 P_n 可表达为

$$P_n(f)(x)=2^n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{\mathbb{R}}\phi(2^ny-k)f(y)dy\right)\phi(2^nx-k).$$

或者

$$P_n(f)(x)=\int_{\mathbb{R}}K_n(x,y)f(y)dy, \tag{6.2.8}$$

其中

$$K_n(x,y)=2^n\sum_{k\in\mathbb{Z}}\phi(2^nx-k)\phi(2^ny-k)=\begin{cases}2^n, & \text{如存在 } k \text{ 使得} x,y\in I_{kn},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记 $L_n(x,y)=:K_{n+1}(x,y)-K_n(x,y)$, 则

$$L_n(x,y)=\begin{cases}2^{n+1}-2^n, & (x,y)\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1/2}{2^n}\right)\times\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1/2}{2^n}\right),\\ 2^{n+1}-2^n, & (x,y)\in\left[\frac{k+1/2}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\times\left[\frac{k+1/2}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right),\\ 0-2^n, & (x,y)\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1/2}{2^n}\right)\times\left[\frac{k+1/2}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right),\\ 0-2^n, & (x,y)\in\left[\frac{k+1/2}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\times\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1/2}{2^n}\right).\end{cases}$$

从而

$$L_n(x,y)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}2^nh(2^nx-k)h(2^ny-k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_{nk}(x)h_{nk}(y). \tag{6.2.9}$$

注意到对每个 $x\in\mathbb{R}$, 由于 (6.2.9) 中的级数仅包含一个非零项, 因此显然收敛. 由 (6.2.8) 得到

$$\begin{aligned}P_{n+1}f(x)-P_nf(x)&=\int_{\mathbb{R}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_{nk}(x)h_{nk}(y)f(y)dy\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}}h_{nk}(x)\left(\int_{\mathbb{R}}h_{nk}(y)f(y)dy\right)\\ &=\sum_{k\in\mathbb{Z}}C_{nk}(f)h_{nk}(x).\end{aligned}$$

最后，运用结论 (6.2.6) 有

$$P_{n+1}f = P_0 f + \sum_{j=0}^{n}(P_{j+1}f - P_j f) = P_0 f + \sum_{j=0}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{nk}(f)h_{nk}(x). \qquad (6.2.10)$$

现对 $n, m \in \mathbb{N}$, 由 (6.2.10) 知

$$P_{n+1}f - P_{-m}f = \sum_{j=-m}^{n}\sum_{k\in\mathbb{Z}} C_{nk}(f)h_{nk}(x).$$

应用命题 6.2.2 结论 (c) 和结论 (e) 便得到 (6.2.5). □

[注 6.2.1] 运用命题 6.2.2 的证明方法，可以得到二进投影算子族 $\{P_n\}$ 的如下性质:

(a) 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$ 及 $f \in L^p(\mathbb{R})\,(1 \leqslant p < \infty)$, $\|P_n f\|_p \leqslant \|f\|_p$;

(b) 如 $f \in L^p(\mathbb{R})\,(1 < p < \infty)$, 那么 $\lim\limits_{m\to\infty} \|P_{-m}f\|_p = 0$;

(c) 如 $f \in L^p(\mathbb{R})\,(1 \leqslant p < \infty)$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty} \|P_n f - f\|_p = 0$.

由上述事实，不难证明对于 $1 < p < \infty$ 及 $f \in L^p(\mathbb{R})$, f 的 Haar 级数 $\sum_{j,k} C_{jk}(f)h_{jk}(x)$ 依 L^p 范数收敛于 f. 此外，当 $f \in C_0(\mathbb{R})$ 时，级数 $\sum_{j,k} C_{jk}(f)h_{jk}(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛于 f.

综合命题 6.2.1 和定理 6.2.3 的结论及 [注 6.2.1], 有

定理 6.2.4 Haar 函数 h 是一个正交小波. 特别地，在 L^p $(1 < p < \infty)$ 意义下

$$f(x) = \sum_{j,k} h_{jk}(x)\left(\int_{\mathbb{R}} f(y)h_{jk}(y)dy\right), \quad \forall\ f \in L^p(\mathbb{R}).$$

§6.3 多尺度分析与正交小波

§6.3.1 正交系和 Riesz 系

在这一节我们将 §6.2 中证明 h 是正交小波的方法一般化，即多尺度分析，这是构造正交小波非常重要的方法. 首先给出正交系和 Riesz 系的定义.

定义 6.3.1 设 H 是一个 Hilbert 空间, 且 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}\subset H$.

(a) 称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为标准正交系, 如果

$$\langle x_k, x_j\rangle=\begin{cases}1, & k=j,\\ 0, & k\neq j;\end{cases}$$

(b) 称 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为 H 中的 Riesz 系, 如果存在常数 $0<A\leqslant B<\infty$, 使得对任意的复数列 $\{a_k\}\in\ell^2$ 有

$$A\sum_k |a_k|^2\leqslant\left\|\sum_k a_k x_k\right\|_H^2\leqslant B\sum_k |a_k|^2. \tag{6.3.1}$$

命题 6.3.1 Hilbert 空间 H 中的集 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为标准正交系当且仅当对任意的复数列 $\{a_k\}\in\ell^2$ 有

$$\left\|\sum_k a_k x_k\right\|_H^2=\sum_k |a_k|^2. \tag{6.3.2}$$

证明 如果 $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为标准正交系, 那么

$$\left\|\sum_k a_k x_k\right\|_H^2=\sum_{k,j} a_k\bar{a}_j\langle x_k, x_j\rangle=\sum_k a_k\bar{a}_k=\sum_k |a_k|^2.$$

反之, 对 $N\in\mathbb{Z}$, 取 $a_N=1$ 及 $a_k=0$, $k\neq N$. 那么由 (6.3.2) 得 $\langle x_N, x_N\rangle=1$. 现设 $M, N\in\mathbb{Z}$ 且 $M\neq N$. 如下选取 $\{a_k\}$:

$$a_k=\begin{cases}1, & k=M,\\ -1, & k=N,\\ 0, & k\neq M \text{ 且 } k\neq N,\end{cases}$$

那么由 (6.3.2) 知

$$2=\|x_M-x_N\|_H^2=2-\langle x_M, x_N\rangle-\langle x_N, x_M\rangle.$$

因此 $\langle x_M, x_N\rangle+\langle x_N, x_M\rangle=0$. 如取

$$a_k=\begin{cases}i, & k=M,\\ -1, & k=N,\\ 0, & k\neq M \text{ 且 } k\neq N,\end{cases}$$

那么得 $\langle x_M, x_N\rangle-\langle x_N, x_M\rangle=0$, 从而 $\langle x_M, x_N\rangle=0$. □

[注 6.3.1] 命题 6.3.1 的一个直接结果是，H 中任一标准正交系必定为 Riesz 系，且此时 $A=B=1$. 此外容易看出，H 中的 Riesz 系是线性无关的.

定理 6.3.2 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $0<A\leqslant B<\infty$. 则以下两条件等价：

(a) 对 a.e. $\xi \in \mathbb{R}$,

$$A \leqslant \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi+l)|^2 \leqslant B; \tag{6.3.3}$$

(b) $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中一个 Riesz 系. 即，对任意的复数列 $\{a_k\}\in\ell^2$

$$A\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2 \leqslant \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi(\cdot-k)\right\|_2^2 \leqslant B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2.$$

证明 首先注意到对任意的 $m\in\mathbb{Z}$

$$\int_m^{m+1}\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2 d\xi = \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_{m+l}^{m+l+1}|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}}|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi < \infty,$$

从而 (6.3.3) 中的和式在 $\mathbb{R}$ 上 a.e. 有限，且此和函数是周期为 1 的周期函数. 在证明 (a) 和 (b) 的等价关系之前，先建立一个等式. 对任意的 $\{a_k\}\in\ell^2$，由 Fourier 变换的性质知

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi(\cdot-k)\Big)^\wedge(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi ik\xi}\hat{\phi}(\xi).$$

如记 $\beta(\xi)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi ik\xi}$, 那么 β 是周期为 1 的周期函数, 且由 Fourier 级数 (关于 $L^2([0,1])$ 的标准正交基 $\{e^{2\pi ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$) 的 Paeseval 等式，有

$$\int_0^1 |\beta(\xi)|^2 d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2. \tag{6.3.4}$$

这样应用 Plancherel 定理得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi(\cdot-k)\right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}}|\beta(\xi)|^2|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_l^{l+1}|\beta(\xi)|^2|\hat{\phi}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{l\in\mathbb{Z}}\int_0^1|\beta(\xi)|^2|\hat{\phi}(\xi+l)|^2 d\xi \\ &= \int_0^1|\beta(\xi)|^2\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2\Big)d\xi.\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

现回到定理 6.3.2 的证明. 设 (6.3.3) 成立, 那么由等式 (6.3.4) 和 (6.3.5) 得

$$A\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2 = A\int_0^1|\beta(\xi)|^2d\xi \leqslant \Big\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\phi(\cdot-k)\Big\|_2^2$$
$$\leqslant B\int_0^1|\beta(\xi)|^2d\xi = B\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2.$$

反之, 对于任意区间 $(a,b)\subset[0,1]$, 令 $\beta(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_ke^{-2\pi ik\xi}$ 是 $\chi_{(a,b)}$ 的 Fourier 级数. 由于 $\{a_k\}\in\ell^2$ 且 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是一个 Riesz 系, 由等式 (6.3.4) 和 (6.3.5) 知

$$A\leqslant \frac{\displaystyle\int_0^1|\beta(\xi)|^2\Big(\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat\phi(\xi+l)|^2\Big)d\xi}{\displaystyle\int_0^1|\beta(\xi)|^2d\xi}\leqslant B.$$

从而

$$A\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat\phi(\xi+l)|^2d\xi\leqslant B.$$

运用 Lebesgue 微分定理 (定理 1.2.9) 知 (6.3.3) 在 $[0,1]$ 中 a.e. 成立, 并且由此可知 (6.3.3) 在 $\mathbb{R}$ 中仍然 a.e. 成立. □

[注 6.3.2] 在上面 (b) 蕴含 (a) 的证明中, 我们实际上已使用了下面结论: $L^2[0,2\pi]$ 中函数 f 的 Fourier 级数几乎处处收敛于 f. 这是俄罗斯数学家 Lusin 在 1913 年提出的著名猜测, 它被瑞典著名数学家 L. Carleson 在 1966 年证明 [20].

推论 6.3.3 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$. 那么 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是标准正交系当且仅当 $\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat\phi(\xi+l)|^2=1$ 在 $\mathbb{R}$ 上几乎处处成立.

推论 6.3.4 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是标准正交系, 那么 $|\operatorname{supp}\hat\phi|\geqslant1$. 此外, 上面等号成立当且仅当存在可测集 K 使得 $|K|=1$ 且 $\hat\phi=\chi_K$.

证明 由推论 6.3.3 知 $\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat\phi(\xi+l)|^2=1$ a.e., 因此 $|\hat\phi(\xi)|\leqslant1$ a.e.. 应用 Parseval 等式

$$|\operatorname{supp}\hat\phi|=\int_{\operatorname{supp}\hat\phi}d\xi\geqslant\int_{\operatorname{supp}\hat\phi}|\hat\phi(\xi)|^2d\xi=1. \tag{6.3.6}$$

又注意到 (6.3.6) 成为等式当且仅当

$$\int_{\operatorname{supp}\hat\phi}(1-|\hat\phi(\xi)|^2)d\xi=0.$$

由于被积函数非负，因此上式成立当且仅当在 $\operatorname{supp}\hat{\phi}$ 上，$1-|\hat{\phi}(\xi)|^2=0$ a.e.. 故取 $K=\operatorname{supp}\hat{\phi}$ 即可. □

定理 6.3.5 设 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 Riesz 系. 那么存在复数列 $\{b_k\}\in\ell^2$ 使 $\{\phi_1(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是标准正交系，其中 $\phi_1(x)=\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}b_k\phi(x-k)$. 此外，

$$\operatorname{span}\big(\{\phi_1(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\big)=\operatorname{span}\big(\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\big). \tag{6.3.7}$$

证明 由推论 6.3.3，只需寻找 $\{b_k\}\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}_1(\xi+l)|^2=1$ a.e. 即可. 如 $\{b_k\}$ 已得出，那么由 ϕ_1 的定义，

$$\hat{\phi}_1(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_ke^{-2\pi ik\xi}\hat{\phi}(\xi):=B(\xi)\hat{\phi}(\xi).$$

这样

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}_1(\xi+l)|^2=\sum_{l\in\mathbb{Z}}|B(\xi+l)|^2|\hat{\phi}(\xi+l)|^2=|B(\xi)|^2\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2.$$

由此只需选择 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 使得

$$|B(\xi)|^2=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_ke^{-2\pi ik\xi}\right|^2=\frac{1}{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2},\quad \text{a.e.} \tag{6.3.8}$$

由于 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 Riesz 系，定理 6.3.2 表明，满足 (6.3.8) 的 $\{b_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是容易得到的. (6.3.3) 告诉我们，

$$\frac{\hat{\phi}(\xi)}{\sqrt{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2}}\in L^2(\mathbb{R}).$$

如令

$$\hat{\phi}_1(\xi)=\frac{\hat{\phi}(\xi)}{\sqrt{\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2}},$$

那么 $\phi_1\in L^2(\mathbb{R})$，且满足定理的要求. 下面说明 (6.3.7). 为此需要证明, 对任意给定的 $\{a_k\}\in\ell^2$, 存在 $\{c_k\}\in\ell^2$ 使得

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\phi(x-k)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k\phi_1(x-k). \tag{6.3.9}$$

反之，对任意给定的 $\{c_k\}\in\ell^2$, 存在 $\{a_k\}\in\ell^2$ 使得 (6.3.9) 成立. 由 Fourier 变换，(6.3.9) 成为

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_ke^{-2\pi ik\xi}\Big)\hat{\phi}(\xi)=\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_ke^{-2\pi ik\xi}\Big)\hat{\phi}_1(\xi).$$

由 $\hat{\phi}_1$ 的定义, 如记

$$A(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k e^{-2\pi ik\xi} \quad 及 \quad C(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{-2\pi ik\xi},$$

那么只需说明下式成立:

$$\begin{aligned} A(\xi) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k e^{-2\pi ik\xi} \\ &= \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k e^{-2\pi ik\xi}\right)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}c_k e^{-2\pi ik\xi}\right) \\ &= B(\xi)C(\xi). \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

由定理 6.3.2 知, 存在常数 $0<A\leqslant B<\infty$ 使得

$$B^{-1}\leqslant|B(\xi)|=\left|\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k e^{-2\pi ik\xi}\right|\leqslant A^{-1}.$$

因此, 对任意给定的 $\{a_k\}\in\ell^2$, 只要取 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 为周期函数 $A(\xi)/B(\xi)$ (周期为 1) 的 Fourier 系数 (关于 $\{e^{2\pi ik\xi}\}_{k\in\mathbb{Z}}$) 即可。反之亦然。 □

[注 6.3.3] 从上面的证明过程可以看出, 当 $\{a_k\},\{c_k\}$ 跑遍 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 时, (6.3.9) 两边生成的函数集合是相同的. 注意到 (6.3.9) 右边的函数集是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的闭子空间, 因此由 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 张成的线性集亦是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的闭子空间.

§6.3.2 多尺度分析和尺度函数

定义 6.3.2 (多尺度分析 (MRA)) 如果存在 $L^2(\mathbb{R})$ 的子空间列 $\mathscr{V}=\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 满足以下条件:

(A) $V_j\subset V_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$;

(B) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}}V_j}=L^2(\mathbb{R}),\qquad \bigcap_{j\in\mathbb{Z}}V_j=\{0\}$;

(C) $f(x)\in V_j\Longleftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},\quad j\in\mathbb{Z}$;

(D) 存在 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的标准正交基.

那么称此子空间列 $\mathscr{V}=\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多尺度分析 (MRA) [1]. 函数 ϕ 称为此多尺度分析的尺度函数.

[注 6.3.4] 关于多尺度分析的定义, 我们给出以下几点说明:

[1] MRA 指 Multi-resolution Analysis.

(i) 如已有 V_0, 那么由 (C) 便可得 $V_j\,(j\in\mathbb{Z})$, 因此只需验证条件 (A)(B) 及 (D);

(ii) 对于给定的 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 MRA, 尺度函数不是唯一的;

(iii) 由条件 (C) 和 (D) 即可知, 对于 $j\in\mathbb{Z}$, $\{2^{j/2}\phi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基. 从而空间 V_j 关于整数平移不变, 即 $f\in V_j \Longleftrightarrow f(\cdot-k)\in V_j\,(k\in\mathbb{Z})$;

(iv) 对 $j\in\mathbb{Z}$, 记 P_j 为 V_j 上的正交投影, 那么条件 (A) 和 (B) 表明在 L^2 意义下, $\lim\limits_{j\to\infty} P_jf=f$ 且 $\lim\limits_{j\to-\infty} P_jf=0$.

命题 6.3.6 定义 6.3.2 中的条件 (D) 可放宽为:

(D') 存在 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 V_0 的 Riesz 基.

证明 这是定理 6.3.5 结论的直接应用. □

命题 6.3.7 设 $\mathscr{V}=\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是一个以 ϕ 为尺度函数的 MRA. 那么存在 1-周期函数 m_0, 使得

$$\hat{\phi}(\xi)=m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}),\quad \text{a.e. } \xi\in\mathbb{R}. \tag{6.3.11}$$

证明 因 $\mathscr{V}$ 是以 ϕ 为尺度函数的 MRA, 故由条件 (C) 和 (D), $\{\sqrt{2}\phi(2x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 V_1 的标准正交基. 这样在 L^2 的意义下,

$$\phi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\phi(2x-k), \tag{6.3.12}$$

这里 $\{a_k/\sqrt{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 ϕ 关于 V_1 的标准正交基 $\{\sqrt{2}\phi(2x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 的 Fourier 系数. 因此

$$a_k=2\int_{\mathbb{R}}\phi(x)\bar{\phi}(2x-k)dx,\quad k\in\mathbb{Z},$$

且 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|a_k|^2<\infty$. 在 (6.3.12) 两边取 Fourier 变换得

$$\hat{\phi}(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_ke^{-2\pi ik\xi 2^{-1}}\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}),\quad \xi\in\mathbb{R}.$$

令 $m_0(\xi)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} a_ke^{-2\pi ik\xi}$ 即可. □

[注 6.3.5] 等式 (6.3.12) 称为尺度方程 (scaling equation), 而满足 (6.3.11) 式的 1- 周期函数 m_0 称为尺度滤子 (scaling filter).

命题 6.3.8 (尺度方程的存在性) 记 $L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 是周期为 1 且在其任意周期上平方可积的函数的全体. 那么 $\phi\in L^2(\mathbb{R})$ 满足尺度方程 (6.3.12) 的充分必要条件是存在 $m\in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 使得 (6.3.11) 成立, 且 $m(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_ke^{-2\pi ik\xi}$.

证明 仅证充分性. 设 $m \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 使得 (6.3.11) 成立. 令

$$a_k = 2\int_0^1 m(\xi)e^{2\pi ik\xi}d\xi,$$

那么

$$m(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{-2\pi ik\xi}, \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}.$$

由上式及 (6.3.11) 并应用 Plancherel 定理知 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 满足尺度方程 (6.3.12). □

[注 6.3.6] 由命题 6.3.8, 也称等式 (6.3.11) 为尺度方程.

下面的定理给出了多尺度分析的存在性.

定理 6.3.9 (MRA 的存在性) 设 $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ 且满足以下条件:

(a) $\{\phi(x-m)\}_{m\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的标准正交系;

(b) 在 L^2 意义下, $\phi(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m\phi(2x-m)$. 其中 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2 < \infty$;

(c) ϕ 的 Fourier 变换 $\hat{\phi}(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 处连续, 且 $|\hat{\phi}(0)| = 1$.

对 $j \in \mathbb{Z}$, 记 $V_j = \operatorname{span}(\{2^{j/2}\phi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbb{Z}})$, 则 $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个以 ϕ 为尺度函数的 MRA.

证明 由条件 (a) 和 (b) 知 $V_j \subset V_{j+1}$. 对 $j, k \in \mathbb{Z}$, 记 $\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi(2^jx-k)$. 现定义 V_j 上的正交投影 P_j 如下: 对 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $P_jf = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle f, \phi_{j,k}\rangle\phi_{j,k}$. 显然 $\{P_j\}$ 是有界线性算子族, 且 $\|P_j\| = 1$. 为证明定理的结论, 只需说明对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 在 L^2 意义下

$$\lim_{j\to\infty} P_jf = f \quad \text{及} \quad \lim_{j\to-\infty} P_jf = 0. \tag{6.3.13}$$

为此, 我们将 (6.3.13) 分解为几个引理的结论.

引理 6.3.10 对任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{j\to-\infty} P_jf = 0$.

证明 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $r > 0$ 使得 $f = f_1 + f_2$, 其中 $f_1 = f\chi_{[-r,r]}$ 且 $\|f_2\|_2 < \varepsilon$. 由条件 (a) 知 $\{2^{j/2}\phi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 V_j 的标准正交基. 因此

$$\begin{aligned}
\|P_jf_1\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f_1, \phi_{j,k}\rangle|^2 &\leqslant \sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\int_{-r}^r |f_1(x)|^2dx\right)\left(\int_{-r}^r |\phi_{j,k}(x)|^2dx\right) \\
&\leqslant \|f\|_2^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^j\left(\int_{-r}^r |\phi(2^jx-k)|^2dx\right) \\
&= \|f\|_2^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-k-2^jr}^{-k+2^jr} |\phi(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

如 $2^jr<1/2$, 记 $U_j=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-k-2^jr,-k+2^jr)$, 那么 $\bigcap_j U_j=\mathbb{Z}$. 应用 Lebesgue 控制收敛定理得到

$$\|P_jf_1\|_2^2\leqslant\|f\|_2^2\int_{U_j}|\phi(x)|^2dx\to 0,\quad j\to-\infty.$$

另一方面，注意到 $\|P_jf_2\|_2\leqslant\|f_2\|_2<\varepsilon$, 从而完成了引理的证明. □

引理 6.3.11 设 $f\in L^2(\mathbb{R})$, 满足 $\hat{f}$ 有界且存在 $r>0$ 使得 $\operatorname{supp}\hat{f}\subset[-r,r]$. 那么当 $2^{j-1}>r$ 时有

$$\|P_jf\|_2^2=\int_{-r}^{r}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2d\xi. \tag{6.3.14}$$

证明 因 $\hat{\phi}_{j,k}(\xi)=2^{-j/2}e^{-2\pi ik\xi2^{-j}}\hat{\phi}(2^{-j}\xi)$, 由 Parseval 等式 (2.2.4) 得到

$$\begin{aligned}\|P_jf\|_2^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\langle f,\phi_{j,k}\rangle|^2&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-r}^{r}\hat{f}(\xi)\bar{\hat{\phi}}_{j,k}(\xi)d\xi\right|^2\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\int_{-r}^{r}\hat{f}(\xi)2^{-j/2}e^{2\pi ik\xi2^{-j}}\bar{\hat{\phi}}(2^{-j}\xi)d\xi\right|^2.\end{aligned}$$

这样由 $\hat{f}$ 的支集条件，当 $2^{j-1}>r$ 时,

$$\int_{-r}^{r}\hat{f}(\xi)2^{-j/2}e^{2\pi ik\xi2^{-j}}\bar{\hat{\phi}}(2^{-j}\xi)d\xi=\int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}}\hat{f}(\xi)2^{-j/2}e^{2\pi ik\xi2^{-j}}\bar{\hat{\phi}}(2^{-j}\xi)d\xi.$$

注意到 $\hat{f}(\xi)\hat{\phi}(2^{-j}\xi)\in L^2(-2^{j-1},2^{j-1})$ 且 $\{2^{-j/2}e^{2\pi ik\xi2^{-j}}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(-2^{j-1},2^{j-1})$ 的标准正交基，因此运用 Parseval 等式有

$$\|P_jf\|_2^2=\int_{-2^{j-1}}^{2^{j-1}}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2d\xi=\int_{-r}^{r}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2d\xi.$$ □

引理 6.3.12 如尺度函数 ϕ 满足定理 6.3.9 的条件，则对任意的 $f\in L^2(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{j\to\infty}\|P_jf-f\|_2=0$.

证明 由于集合

$$\Lambda=\{f\in L^2(\mathbb{R}):\ \hat{f}\text{有界且}\hat{f}\text{具紧支集}\}$$

在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密，故只需说明结论对 Λ 是成立的. 另一方面，由于 $\|P_jf\|_2^2=\|f\|_2^2-\|f-P_jf\|_2^2$, 因此只要证明

$$\lim_{j\to\infty}\|P_jf\|_2=\|f\|_2,\quad\forall f\in\Lambda \tag{6.3.15}$$

即可. 由条件知，当 $j \to \infty$ 时，$|\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|$ 在任一个含原点的紧集上一致收敛于 1. 这样由 (6.3.14), 对 $2^{j-1} > r$（假定 $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-r, r]$），当 $j \to \infty$ 时，有

$$\|P_j f\|_2^2 = \int_{-r}^{r} |\hat{f}(\xi)\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \longrightarrow \int_{-r}^{r} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|f\|_2^2.$$

此即 (6.3.15) 式. □

最后，综合上面引理的结论得到 (6.3.13). 从而完成了定理 6.3.9 的证明. □

[注 6.3.7] 关于定理 6.3.9, 我们给出以下几点进一步的结果：

(i) 如已有一个 MRA, 那么其尺度函数 ϕ 的条件 $|\hat{\phi}(0)| = 1$ 被 $\hat{\phi}(\xi)$ 在 $\xi = 0$ 处连续的条件所蕴含. 事实上，注意到 $\|P_j f\|_2 \to \|f\|_2\,(j \to \infty)$. 对 $f \in \Lambda$ 及 $2^{j-1} > r$ (r 满足 $\operatorname{supp} \hat{f} \subset [-r, r]$)，在 (6.3.14) 的两边令 $j \to \infty$ 得

$$\|f\|_2^2 = |\hat{\phi}(0)|^2 \int_{-r}^{r} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = |\hat{\phi}(0)|^2 \|f\|_2^2.$$

故 $|\hat{\phi}(0)| = 1$.

(ii) 定理 6.3.9 中函数 ϕ 的条件 $|\hat{\phi}(0)| = 1$ 可减弱为 $\hat{\phi}(0) \neq 0$. 事实上，如 $\overline{\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} \neq L^2(\mathbb{R})$, 则存在非零函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 正交于 $\cup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$, 故 $P_j f = 0\,(j \in \mathbb{Z})$. 现任取 $\varepsilon > 0$, 必存在 $g \in \Lambda$ 和 $r > 0$, 使得 $\operatorname{supp} \hat{g} \subset [-r, r]$ 及 $\|f - g\|_2 < \varepsilon$. 因此 $\|P_j g\|_2 = \|P_j(g - f)\|_2 < \varepsilon$. 在 (6.3.14) 的两边令 $j \to \infty$ 得

$$\varepsilon^2 \geqslant \|P_j g\|_2^2 = \int_{-r}^{r} |\hat{g}(\xi)|^2 |\hat{\phi}(2^{-j}\xi)|^2 d\xi \longrightarrow |\hat{\phi}(0)|^2 \|g\|_2^2 \geqslant |\hat{\phi}(0)|^2 (\|f\| - \varepsilon)^2,$$

且上述不等式对一切 $\varepsilon > 0$ 均成立. 但此与 f 非零相矛盾.

(iii) 可以证明，定理 6.3.9 中函数 ϕ 的条件 $|\hat{\phi}(0)| = 1$ 亦可减弱为下面的条件 $\lim_{j\to\infty} |\hat{\phi}(2^{-j}\xi)| = 1$, a.e. $\xi \in \mathbb{R}$. 此外，上述条件对于以 ϕ 为尺度函数的 MRA 也是必要的.

(iv) 如函数 $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, 那么定理 6.3.9 的条件对于以 ϕ 为尺度函数的 MRA 也是必要的. 仅说明条件 (c). 事实上，由 $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ 知 $\hat{\phi} \in C_0(\mathbb{R})$, 故 $\hat{\phi}$ 在 $\xi = 0$ 处连续. 又由本注记 (i) 知 $|\hat{\phi}(0)| = 1$.

§6.3.3 多尺度分析生成的正交小波

设 $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个多尺度分析. 记 W_j 为 V_j 在 V_{j+1} 中的正

交补, 即 $V_j \oplus W_j = V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$. 由多尺度分析的定义可得

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j. \tag{6.3.16}$$

事实上,

$$V_0 = W_{-1} \oplus V_{-1} = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus V_{-2} = \oplus_{j=1}^{n} W_{-j} \oplus V_{-n} = \oplus_{j=1}^{\infty} W_{-j}.$$

记 V_j 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中的正交补为 $V_j^{\perp}$, 则对任意的 $j \in \mathbb{Z}$, $V_j^{\perp} = W_j \oplus V_{j+1}^{\perp}$. 由 $\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 中稠密, 因此

$$\Big(\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j\Big)^{\perp} = \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j^{\perp} = \lim_{j \to \infty} V_j^{\perp} = \{0\}.$$

故

$$V_0^{\perp} = W_0 \oplus V_1^{\perp} = W_0 \oplus W_1 \oplus V_2^{\perp} = \oplus_{j=0}^{n-1} W_j \oplus V_n^{\perp} = \oplus_{j=0}^{\infty} W_j.$$

从而

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus V_0^{\perp} = \big(\oplus_{j=-\infty}^{-1} W_j\big) \oplus \big(\oplus_{j=0}^{\infty} W_j\big) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j.$$

又由定义 6.3.2 条件 (C)

$$f(x) \in W_j \Longleftrightarrow f(2x) \in W_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{6.3.17}$$

现设 $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ 使得 $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成 W_0 的标准正交基, 由 (6.3.17) 即知对于任意的 $j \in \mathbb{Z}$, $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 是 W_j 的标准正交基. 再由 (6.3.16) 知 ψ 是一个正交小波. 此时称 ψ 为多尺度分析 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波.

定理 6.3.13 设 $\mathscr{V} = \{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个以 ϕ 为尺度函数的 MRA. 则下面结论成立:

(a) ϕ 的尺度滤子 m_0 满足

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1; \tag{6.3.18}$$

(b) 如 ψ 是由 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波, 则存在 1- 周期函数 m_1, 使得

$$\hat{\psi}(\xi) = m_1(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}, \tag{6.3.19}$$

且 m_1 满足

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 1 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}, \tag{6.3.20}$$

$$m_0(\xi)\overline{m}_1(\xi) + m_0(\xi+\frac{1}{2})\overline{m}_1(\xi+\frac{1}{2}) = 0 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}; \tag{6.3.21}$$

(c) 如存在 $m_1 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 满足 (6.3.20) 和 (6.3.21), 那么由 (6.3.19) 确定的 $L^2(\mathbb{R})$ 中函数 ψ 是由 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波.

证明 由推论 6.3.3 及 (6.3.11) 得到

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi+2k)|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi+2k+1)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|m_0(\frac{\xi+2k}{2})\right|^2 \left|\hat{\phi}(\frac{\xi+2k}{2})\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|m_0(\frac{\xi+2k+1}{2})\right|^2 \left|\hat{\phi}(\frac{\xi+2k+1}{2})\right|^2 \\
&= |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}+k)\right|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{\phi}(\frac{\xi+1}{2}+k)\right|^2 \\
&= |m_0(\frac{\xi}{2})|^2 + |m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})|^2.
\end{aligned}$$

此即为 (6.3.18). 现讨论 (b). 因 ψ 是由 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波, 故 $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是标准正交系. 由推论 6.3.3 知

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\xi+l)|^2 = 1 \quad \text{a.e. } \xi \in \mathbb{R}. \tag{6.3.22}$$

又由于 $\psi \in W_1$, 那么存在 $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^2 < \infty$ 使得在 L^2 的意义下,

$$\psi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k \phi(2x-k). \tag{6.3.23}$$

如记 $m_1(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k e^{-2\pi i k\xi}$, 对上式作 Fourier 变换知 (6.3.19) 成立. 再由 (6.3.19) 和 (6.3.22), 并运用 (6.3.18) 的计算过程便可得 (6.3.20). 下面说明 (6.3.21) 式. 注意到 $\psi \perp V_0$. 因此

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x-k)\bar{\psi}(x)dx = 0, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

由此式得到, 对 $\forall\, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(\xi) e^{-2\pi i k\xi} d\xi \\
&= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int_0^1 \hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l) e^{-2\pi i k\xi} d\xi \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l) \right) e^{-2\pi i k\xi} d\xi.
\end{aligned} \tag{6.3.24}$$

上式表明, 1- 周期函数 $\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l)$ 的一切 Fourier 系数均为零. 从而 $\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l)=0$, a.e. $\xi\in\mathbb{R}$. 这样, 由上述事实及推论 6.3.3 知

$$
\begin{aligned}
0&=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l)\\
&=\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+2l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+2l)+\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+2l+1)\bar{\hat{\psi}}(\xi+2l+1)\\
&=\sum_{l\in\mathbb{Z}}m_0(\frac{\xi}{2}+l)\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}+l)\left|\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}+l)\right|^2\\
&\quad+\sum_{l\in\mathbb{Z}}m_0(\frac{\xi}{2}+l+\frac{1}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}+l+\frac{1}{2})\left|\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}+l+\frac{1}{2})\right|^2\\
&=m_0(\frac{\xi}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2})\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}+l)\right|^2+m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}(\frac{\xi+1}{2}+l)\right|^2\\
&=m_0(\frac{\xi}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2})+m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}).
\end{aligned}
$$

最后，我们证明结论 (c). 设 $m_1\in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ 且满足 (6.3.20) 和 (6.3.21)，我们需要说明对于满足 (6.3.19) 的 ψ, $\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 构成 W_0 的标准正交基. 事实上，对 a.e. $\xi\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\xi+k)|^2\\
&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|m_1(\frac{\xi+2k}{2})\right|^2\left|\hat{\phi}(\frac{\xi+2k}{2})\right|^2\\
&\quad+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|m_1(\frac{\xi+2k+1}{2})\right|^2\left|\hat{\phi}(\frac{\xi+2k+1}{2})\right|^2 \qquad (6.3.25)\\
&=|m_1(\frac{\xi}{2})|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}+k)\right|^2+|m_1(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})|^2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\phi}(\frac{\xi+1}{2}+k)\right|^2\\
&=|m_1(\frac{\xi}{2})|^2+|m_1(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})|^2=1.
\end{aligned}
$$

因此由推论 6.3.3 知 $\{\psi(t-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是标准正交系. 类似地，由 (6.3.25) 式及结论 (b) 中 (6.3.21) 的证明过程知

$$
\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l)=m_0(\frac{\xi}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2})+m_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\bar{m}_1(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}).
$$

故 $\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l)=0$ a.e. $\xi\in\mathbb{R}$. 因而, 对所有 $k\in\mathbb{Z}$ 由 (6.3.24) 得

$$
0=\int_0^1\left(\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\phi}(\xi+l)\bar{\hat{\psi}}(\xi+l)\right)e^{-2\pi ik\xi}d\xi=\int_{\mathbb{R}}\hat{\phi}(\xi)\bar{\hat{\psi}}(\xi)e^{-2\pi ik\xi}d\xi.
$$

上式等价于

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x-k)\bar{\psi}(x)dx = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

此表明 $\psi \perp V_0$. 因此完成了结论 (c) 的证明. □

[注 6.3.8] 等式 (6.3.19) 和 (6.3.23) 均称为小波方程 (wavelet equation), 而 1- 周期函数 m_1 称为小波滤子 (wavelet filter).

[注 6.3.9] 由 (6.3.11) 和 (6.3.18) 可知, 如 m_0 是一个 MRA 的尺度滤子, 那么 $|m_0(\xi)| \leqslant 1$, $m_0(0) = 1$ 及 $m_0(\frac{1}{2}) = 0$. 如 m_1 是由 MRA 生成的正交小波的小波滤子, 那么 $|m_1(\xi)| \leqslant 1$ 及 $m_1(0) = 0$.

[注 6.3.10] 定理 6.3.13 的结论亦可表达为: 设 $\mathscr{V}$ 是以 ϕ 为尺度函数的 MRA, m_0 为其尺度滤子. 那么 $L^2(\mathbb{R})$ 中函数 ψ 是由 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波当且仅当存在 $m_1 \in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, 使得对 a.e. $\xi \in \mathbb{R}$, ψ 满足小波方程 (6.3.19) 且矩阵

$$M(\xi) = \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_0(\xi+\frac{1}{2}) \\ m_1(\xi) & m_1(\xi+\frac{1}{2}) \end{pmatrix} \tag{6.3.26}$$

是酉矩阵.

下面我们进一步讨论尺度滤子和小波滤子之间的关系. (6.3.21) 式告诉我们, 对 a.e. $\xi \in \mathbb{R}$, 向量 $(m_0(\xi), m_0(\xi+\frac{1}{2}))$ 与向量 $(\overline{m}_1(\xi), \overline{m}_1(\xi+\frac{1}{2}))$ 正交. 因此必存在 1- 周期函数 $\alpha(\xi)$, 使得

$$(m_1(\xi), m_1(\xi+\frac{1}{2})) = \alpha(\xi)(\overline{m}_0(\xi+\frac{1}{2}), -\overline{m}_0(\xi)). \tag{6.3.27}$$

由 (6.3.18) 和 (6.3.20) 即知 $|\alpha(\xi)| = 1$. 又在 (6.3.27) 中用 $\xi + \frac{1}{2}$ 代 ξ, 则得到 $\alpha(\xi+\frac{1}{2}) = -\alpha(\xi)$. 这样

$$m_1(\xi) = \alpha(\xi)\overline{m}_0(\xi+\frac{1}{2}), \quad \text{其中} \quad \alpha(\xi+\frac{1}{2}) = -\alpha(\xi), \quad |\alpha(\xi)| = 1.$$

显然由上式所确定的 m_1 满足 (6.3.20) 和 (6.3.21). 另一方面, 由上式函数 $\alpha(\xi)$ 的性质亦可知存在 1- 周期函数 $\mu(\xi)$, 使得

$$\alpha(\xi) = e^{-2\pi i\xi}\mu(2\xi), \quad \text{且} \quad |\mu(\xi)| = 1.$$

这样我们得到尺度滤子和小波滤子之间的如下关系:

$$m_1(\xi) = e^{-2\pi i\xi}\mu(2\xi)\overline{m}_0(\xi+\frac{1}{2}), \quad \text{其中 } \mu \text{ 为 1- 周期函数}, \quad |\mu(\xi)| = 1. \tag{6.3.28}$$

因此由 $\mathscr{V}$ 生成的正交小波 ψ 可通过 Fourier 变换定义如下：

$$\hat{\psi}(\xi)=m_1(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2})=e^{-\pi i\xi}\mu(\xi)\overline{m}_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}). \tag{6.3.29}$$

由前面的讨论我们知道，尺度滤子 m_0 和小波滤子 m_1 有如下表达式：

$$m_0(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k e^{-2\pi ik\xi} \quad 及 \quad m_1(\xi)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}b_k e^{-2\pi ik\xi}.$$

下面我们将运用关系式 (6.3.28) 给出系数 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 间的关系. 由 (6.3.28) 得

$$\begin{aligned} m_1(\xi) &= e^{-2\pi i\xi}\mu(2\xi)\overline{m}_0(\xi+\frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\pi i\xi}\mu(2\xi)\sum_{l\in\mathbb{Z}}\bar{a}_l e^{2\pi il(\xi+1/2)} \\ &= \frac{1}{2}\mu(2\xi)\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^l\bar{a}_l e^{2\pi i(l-1)\xi} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\bar{a}_{1-k}\mu(2\xi)e^{-2\pi ik\xi}. \end{aligned}$$

因此

$$b_k=(-1)^{k-1}\bar{a}_{1-k}\mu(2\xi), \quad \forall\ k\in\mathbb{Z}. \tag{6.3.30}$$

应用 (6.3.23) 和 (6.3.30) 知，由 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波 ψ 满足下面的小波方程：

$$\psi(x)=\mu(2\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^{k-1}\bar{a}_{1-k}\phi(2x-k), \tag{6.3.31}$$

这里 μ 为 1- 周期函数且满足 $|\mu(\xi)|=1$.

由定理 6.3.13 及上述讨论，下面的结论是明显的.

定理 6.3.14 设 $\mathscr{V}=\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个以 ϕ 为尺度函数的 MRA. 则：

(a) 由等式

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{-\pi i\xi}\overline{m}_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}) \tag{6.3.32}$$

定义的函数 ψ 是由 $\mathscr{V}$ 生成的正交小波；

(b) 在 L^2 的意义下，ψ 满足以下小波方程

$$\psi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}(-1)^k\bar{a}_k\phi(2x+k-1), \tag{6.3.33}$$

其中 $a_k = 2\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\bar{\phi}(2x-k)dx, \quad k \in \mathbb{Z}$;

(c) 由 $\mathscr{V}$ 所生成的任何正交小波 Ψ 都具有如下形式：对 a.e. $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\hat{\Psi}(\xi) = \mu(\xi)\hat{\psi}(\xi),$$

其中 μ 为满足 $|\mu(\xi)| = 1$ 的 1- 周期函数.

[注 6.3.11] 设函数 ψ 是由以 ϕ 为尺度函数的 MRA$\mathscr{V}$ 生成的正交小波. 由 (6.3.32) 和 [注 6.3.9] 可知 $\hat{\psi}(0) = m_0(\frac{1}{2})\hat{\phi}(0) = 0$. 因此，如果 $\psi \in L^1(\mathbb{R})$, 那么必定有 $\int_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$.

§6.3.4 正交小波的例子

1. Haar 小波

在 §6.2 中我们已说明了 Haar 函数是一个正交小波. 这里我们通过 Haar 尺度函数及相应的 MRA 再次证明这一事实. 由 (6.2.7) 知 Haar 尺度函数 $\phi(x) = \chi_{[0,1)}(x)$. 对 $j \in \mathbb{Z}$, 记 $V_j = \overline{\{2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k)\}}_{k\in\mathbb{Z}}$, 那么 V_j 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的闭子空间. 易知，$\mathscr{V} = \{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是以 ϕ 为尺度函数的 $L^2(\mathbb{R})$ 中一个 MRA. 那么 Haar 小波 h 则是 $\mathscr{V}$ 生成的正交小波.

事实上，注意到 ϕ 满足以下等式：

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x-1), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{6.3.34}$$

如取 $a_0 = a_1 = 1$, 而对其他的 $k \in \mathbb{Z}$, 令 $a_k = 0$, 那么 (6.3.34) 式表明 ϕ 满足尺度方程，且相应的尺度滤子 m_0 为:

$$m_0(\xi) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\pi i\xi}) = e^{-i\pi\xi}\cos(\pi\xi).$$

现取 $\mu(\xi) \equiv -1$, 令

$$m_1(\xi) = -e^{-2\pi i\xi}\overline{m}_0(\xi + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi i\xi}) = ie^{-i\pi\xi}\sin(\pi\xi).$$

易知 m_1 满足 (6.3.20) 和 (6.3.21). 由 (6.3.30) 得 $b_0 = 1, b_1 = -1,\ b_k = 0\ (k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1\})$. 于是满足如下小波方程

$$\psi(x) = \phi(2x) - \phi(2x-1)$$

的 ψ 为 $\mathscr{V}$ 所生成的正交小波, 此时 m_1 为其相应的小波滤子. 显然 ψ 即为 Haar 小波 h.

2. Shennon 小波

Shennon 尺度函数定义为: $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. 则 $\hat{\phi}(\xi)=\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi)$. 不难看出, 对 a.e. $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+l)|^2=1.$$

由推论 6.3.3 知 $\{\phi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的标准正交系. 从而对 $j\in\mathbb{Z}$,

$$\{2^{j/2}\phi(2^j\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

亦是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的标准正交系. 如对 $\xi\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, 取

$$m_0(\xi)=\begin{cases}1, & |\xi|<\frac{1}{4},\\ 0, & \frac{1}{4}\leqslant|\xi|\leqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

再令

$$m_0(\xi+1)=m_0(\xi),\quad \xi\in\mathbb{R},$$

那么下面等式成立

$$\hat{\phi}(\xi)=\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi)=m_0(\frac{\xi}{2})\chi_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\frac{\xi}{2})=m_0(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2}),\quad \xi\in\mathbb{R}. \tag{6.3.35}$$

从而由命题 6.3.8 知 ϕ 满足尺度方程 (6.3.12). 这样, 如对 $j\in\mathbb{Z}$, 令

$$V_j=\overline{\{2^{j/2}\phi(2^j\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}},$$

那么由定理 6.3.9, $\mathscr{V}=\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 便是以 ϕ 为尺度函数的 $L^2(\mathbb{R})$ 中一个 MRA. 于是运用定理 6.3.14 结论 (a), 由等式

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{-\pi i\xi}\overline{m}_0(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2})$$

定义的函数 ψ 是由 $\mathscr{V}$ 生成的正交小波. 经计算得

$$\psi(x)=\frac{2}{\pi(2x-1)}[\sin 2\pi(x-\frac{1}{2})-\sin\pi(x-\frac{1}{2})].$$

所得的正交小波 ψ 称为 Shennon 小波.

3. Meyer 小波

在 $[0,1]$ 上定义函数 θ, 使其满足以下条件:

$$0\leqslant\theta(\xi)\leqslant 1; \tag{6.3.36}$$

$$\theta(\xi)+\theta(1-\xi)=1; \tag{6.3.37}$$

$$\xi \longrightarrow \theta(\xi) \quad \text{为单调减}; \tag{6.3.38}$$

$$\theta(\xi)=1, \quad 0\leqslant \xi \leqslant \frac{1}{3}; \tag{6.3.39}$$

[注 6.3.12] 满足上述条件的函数 θ 的存在性是显然的. 上面对称性条件 (6.3.37) 表明当 $\frac{2}{3}\leqslant \xi \leqslant 1$ 时 $\theta(\xi)=0$ 及 $\theta(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. 单调性条件 (6.3.38) 说明当 $0\leqslant \xi \leqslant \frac{1}{2}$ 时 $\theta(\xi)\geqslant \frac{1}{2}$.

现将 θ 作如下延拓，使其成为 $\mathbb{R}$ 上有定义的函数：对 $-1\leqslant \xi \leqslant 0$，令 $\theta(\xi)=\theta(-\xi)$; 对 $|\xi|>1$，令 $\theta(\xi)=0$. 这样 θ 为 $\mathbb{R}$ 上的偶函数且仍满足 (6.3.36). 记

$$\phi(x)=(\sqrt{\theta(\cdot)})^{\vee}(x)=\int_{-1}^{1} e^{2\pi i x\xi}\sqrt{\theta(\xi)}d\xi, \quad x\in\mathbb{R}. \tag{6.3.40}$$

由于 $\operatorname{supp}\theta\subset[-1,1]$, 因此由 (6.3.40) 知和式

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+k)|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\theta(\xi+k) \quad (\xi\in\mathbb{R})$$

中至多含两个非零项，且它们可归结为 $\theta(\zeta)$ 和 $\theta(\zeta+1)$ 两项，其中 $-1\leqslant\zeta\leqslant 0$. 而由 θ 的定义知

$$\theta(\zeta)+\theta(\zeta+1)=1, \quad -1\leqslant\zeta\leqslant 0.$$

因此对 $\xi\in\mathbb{R}$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\phi}(\xi+k)|^2=1$. 应用推论 6.3.3, $\{\phi(\cdot-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 中的标准正交系.

为说明 ϕ 满足尺度方程 (6.3.12)，我们如下构造尺度滤子 m_0：

$$m_0(\xi)=\sqrt{\theta(2\xi)}, \quad |\xi|\leqslant\frac{1}{2}.$$

再将 m_0 按周期为 1 延拓至全直线：$m_0(\xi+1)=m_0(\xi)$ $(\xi\in\mathbb{R})$. 显然 $m\in L^2(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$. 由 $\hat{\phi}(\xi)=\sqrt{\theta(\xi)}$ 及 θ 的定义可知对 $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\hat{\phi}(2\xi)=m_0(\xi)\hat{\phi}(\xi). \tag{6.3.41}$$

上式和命题 6.3.8 表明 ϕ 满足尺度方程 (6.3.12). 最后 $\hat{\phi}(\xi)$ 在零点连续，且 $|\hat{\phi}(0)|=\sqrt{\theta(0)}=0$. 至此，我们已验证了 ϕ 满足定理 6.3.9 的条件 (a)~(c), 因此对 $j\in\mathbb{Z}$, 如记 $V_j=\operatorname{span}\big(\{2^{j/2}\phi(2^jt-k)\}_{k\in\mathbb{Z}}\big)$, 则 $\mathscr{V}=\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个以 ϕ 为尺度函数的 MRA.

由尺度滤子 m_0 和小波滤子 m_1 之间的关系 (6.3.28), 可计算出小波滤子 m_1 (取 $\mu(\xi)\equiv 1$):

$$m_1(\xi)=e^{-2\pi i\xi}\overline{m}_0(\xi+\frac{1}{2})=e^{-2\pi i\xi}\sqrt{\theta(1-2|\xi|)},\quad |\xi|\leqslant\frac{1}{2}.$$

对 $\xi\in\mathbb{R}$, 令 $m_0(\xi+1)=m_0(\xi)$, 那么 m_1 为 $\mathbb{R}$ 上 1- 周期函数. 这样 Meyer 小波 ψ 便由下面的小波方程所定义:

$$\hat{\psi}(\xi)=m_1(\frac{\xi}{2})\hat{\phi}(\frac{\xi}{2})=e^{-\pi i\xi}\sqrt{\theta(1-|\xi|)\theta(\frac{\xi}{2})}.$$

[注 6.3.13] 关于 Meyer 小波 ψ 及其尺度函数 ϕ, 我们给出几点说明:

(i) 由定义 (6.3.40) 知 $\hat{\phi}$ 具有紧支集, 因而 $\phi\in C^\infty(\mathbb{R})$, 且对任意的 $l\in\mathbb{Z}_+$

$$|\phi^{(l)}(x)|\leqslant\int_{-1}^{1}|2\pi\xi|^l|\hat{\phi}(\xi)|d\xi\leqslant C_l.$$

(ii) 如果 $\sqrt{\theta(\xi)}\in C^k(\mathbb{R})$ 及 $l\in\mathbb{Z}_+$, 那么存在 $C_{kl}>0$, 使得对任意的 $x\in\mathbb{R}$ 有 $|x^k\phi^{(l)}(x)|\leqslant C_{kl}$.

(iii) 如果 $\sqrt{\theta(\xi)}\in C^\infty(\mathbb{R})$, 那么 $\phi\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

[注 6.3.14] 例 1 中的 Haar 尺度函数具有紧支集, 但不连续. 例 2 中的 Shennon 尺度函数虽为 $C^\infty(\mathbb{R})$ 函数, 但在无穷远处衰减缓慢. 上面注记说明, 只要加强函数 θ 的光滑性, 其 Meyer 小波的尺度函数在无穷远处便具有相应阶的衰减性.

[注 6.3.15] Meyer 小波也包括了 Shennon 小波. 事实上, 如在 $[0,1]$ 上定义函数 θ 为

$$\theta(\xi)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\xi<\dfrac{1}{2},\\ \dfrac{1}{2}, & \xi=\dfrac{1}{2},\\ 0, & \dfrac{1}{2}<\xi\leqslant 1.\end{cases}$$

那么 θ 满足 (6.3.36)~(6.3.39), 且由 (6.3.40) 所定义的尺度函数 $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$.

小波分析理论可推广到高维情形. 在现代分析领域中, 小波分析理论可用于 Lebesgue 空间、Sobolev 空间、Hardy 空间、BMO 空间、Hölder 函数空间的刻画及积分算子性质的研究. 此外小波分析已被广泛应用于数值分析、信号与图像分析中的数据处理、地震勘探、语音识别等领域. 有关小波分析理论的深入讨论及其应用可见 [23] [13] [14] [24] [4] [7] [2] [6] 等.

参考文献

[1] 程民德、邓东皋、龙瑞麟著. 实分析. 高等教育出版社，1993 年

[2] [美] 崔锦泰著. 程正兴译. 小波分析导论. 西安交通大学出版社，1995 年

[3] 邓东皋、韩永生著. H^p 空间论. 北京大学出版社，1992 年

[4] 邓东皋、彭立中著. 小波分析. 数学进展，**20** (1991), 294~310

[5] 韩永生著. 近代调和分析方法及其应用. 科学出版社，1988 年

[6] 梁学章、何甲兴、王新民等编著. 小波分析. 国防工业出版社，2005 年

[7] 龙瑞麟著. 高维小波分析. 世界图书出版公司，1995 年

[8] 陆善镇著. H^p 空间实变理论及其应用. 上海科学技术出版社, 1992

[9] 陆善镇、王昆扬著. Bochner-Riesz 平均. 北京师范大学出版社，1988 年

[10] 陆善镇、王昆扬著. 实分析 (第二版). 北京师范大学出版社，2006 年

[11] 苗长兴著. 调和分析及其在偏微分方程中的应用 (第二版). 科学出版社，2004 年

[12] 周民强编. 调和分析讲义. 北京大学出版社，1999 年

[13] [法]Y.Meyer 著. 尤众译. 小波与算子 (第 1 卷). 世界图书出版公司,1992 年

[14] [法]Y.Meyer著. 王耀东译. 小波与算子 (第 2 卷).世界图书出版公司,1994年

[15] S. Axler, P. Bourdon and W. Ramy. *Harmonic Function Theory.* 2nd Edi., Graduate Texts in Math., **137**, Springer-Verlag, Berlin, 2001

[16] A. P. Calderón, M. Weiss and A. Zygmund. *On the existence of singular integrals.* Proc. Symp. Pure Math., AMS., **10** (1967), 56~73

[17] A. P. Calderón and A. Zygmund. *On the existence of certain singular integrals.* Acta Math., **88** (1952), 85~139

[18] A. P. Calderón and A. Zygmund. *On singular integrals.* Amer. J. Math., **78** (1956), 289~309

[19] A. P. Calderón and A. Zygmund. *A note on singular integrals.* Studia Math., **65** (1979), 77~87

[20] L. Carleson. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series.* Acta Math., **116** (1966), 135~157

[21] M. F. Chen. *Eigenvalues, Inequalities, and Ergodic Theory.* Springer-Verlag, Berlin, 2005

[22] W. C. Connett. *Singular integrals near* L^1. Proc. Symposia Pure Math., Amer.Math.Soc., **35** (1979) Part I, 163~165

[23] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* **61**. CBS-NSF regional Conference in Applied Math., SIAM, 1992

[24] G. David. *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaces.* Lecture Notes in Math. **1465**, Springer-Verlag, Berlin, 1991

[25] J. Duoandikoetxea. *Fourier Analysis.* Grad. Studies in Math. **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000

[26] D. S. Fan and Y. B. Pan. *Singular integral operators with rough kernels supported by subvarieties.* Amer. J. of Math., **119** (1997), 799~839

[27] C. Fefferman. *Recent Progress in Classical Fourier Analysis.* Proc. of ICM, Vancouver, 1974, 95~118

[28] C. Fefferman and E. M. Stein. H^p *spaves of several variables.* Acta Math., **129** (1972), 137~193

[29] G. Folland. *Introduction to Partial Differential Equations.* 2nd Edi., Princeton Univ. Press, Princeton. 1995

[30] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia. *Weighted Norm inequalities and Related Topics.* North-Holland Math. Studies **116**, North-Holland, Amsterdam, 1985

[31] J. Garnett. *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, New York, 1981

[32] L. Grafakos. *Classical and Modern Fourier Analysis.* Pearson Education, Inc. New jersey, 2004

[33] L. Hömander. *Estimates for translation invariant operators in* L^p *spaces.* Acta Math. **104** (1960), 93~140

[34] F. John and L. Nirenberg. *On functions of bounded mean oscillation.* Comm. Pure and Appl. Math., **14** (1961), 415~426

[35] P. Lemarié and Y. Meyer. *Ondelettes et bases hibertiennes.* Rev. Mat. Iber., **2** (1986), 1~18

[36] S. Z. Lu. *Four Lectures on Real* H^p *Spaces.* World Scientific Publishing, Singapore, 1995

[37] S. Z. Lu, Y. Ding and D. Y. Yan. *Singular Integral and Related Topics.* World Scientific Publishing, Singapore, 2007

[38] Y. Meyer. *Principe d'incertitude, bases hibertiennes et algèbres d'opérdteurs.* Séminaire Bourbaki, 1985/86, No.**662**

[39] M. Pinsky. *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets.* Brooks/Cole, 2002

[40] I. Privalov. *Boundary Properties of Analytic Functions.* GITTL, Moscow, 1950 (Russian)

[41] F. Ricci and G. Weiss. *A characterization of* $H^1(\Sigma_{n-1})$. Proc. Symposia Pure Math., **35** (1979) part I, 289~294

[42] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* 3rd Edi., McGraw-Hill Publishing, New Delhi, 1987

[43] C. Sadosky. *Interpolation of Operators and Singular Integrals.* Marcel Dekker Inc., 1976

[44] A. Seeger. *Singular integral operators with rough convolution kernels.* J. Amer. Math. Soc., **9** (1996), 95~105

[45] E. M. Stein. *Singular Integrals Differentiable Properties of Functions.* Princeton Univ. Press, Princeton. 1970

[46] E. M. Stein. *Harmonic Analysis: Real Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.* Princeton Univ. Press, Princeton. 1993

[47] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An introduction, Princeton Lectures in Analysis I.* Princeton Univ. Press, Princeton. 2003

[48] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Complex Analysis, Princeton Lectures in Analysis II.* Princeton Univ. Press, Princeton. 2003

[49] E. M. Stein and R. Shakarchi. *Real Analysis: Princeton Lectures in Analysis III.* Princeton Univ. Press, Princeton. 2005

[50] E. M. Stein and G. Weiss. *On the theory of harmonic functions of several variabies.* Acta Math., **103** (1960), 26~62

[51] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton Univ. Press, Princeton. 1971

[52] K. Y. Wang and L. Q. Li. *Harmonic Analysis and Approximation on the Unit Sphere.* Graduate Texts in Math., **1**, Science Press, Beijing, 2000

[53] K. Yosida. *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1978

[54] A. Zygmund. *Trigonometric Series, Vol. I, II.* 3rd ed., Cambridge University Press, Cambrige, UK, 1977

索 引

(p,p)型算子, 31, 149, 154, 176
(p,q)有界, 5
(p,q)型算子, 5
$\mathbb{S}^{n-1}$, 24
$\mathbb{S}^{n-1}$上函数空间的关系, 192
$\mathfrak{H}_2^k$, 53
$\mathfrak{H}_n^k$, 129
$\Gamma_\alpha^h(x)$, 108
$\Gamma_\alpha(x)$, 29
$\mathscr{P}_k^n$的分解定理, 116
Φ平均, 42, 46
$\rho_{\alpha,\beta}$, 67
$\Sigma_x(r)$, 88
$\mathbb{R}$上Heaviside函数, 76
$\mathbb{R}_+^{n+1}$, 27, 103
$\mathbb{R}_+^{n+1}$上共轭调和函数系, 166, 168
$\mathbb{R}_+^{n+1}$上的Hardy空间, 168
$\mathbb{R}^2$中单位圆上Poisson核, 120, 123
$\mathbb{R}^n$上Heaviside函数, 77
$\mathbb{R}^n$中单位球上Poisson核, 97, 124
$\mathbb{Z}_+^n$, 66
$\mathcal{M}_{x,r}(u)$, 89
$\mathcal{V}_{x,r}(u)$, 95
$\mathscr{A}_k^n$, 116, 118, 129
$\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, 72
$\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, 66
$\mathscr{F}$, 48
$\mathscr{F}^{-1}$, 50
$\mathscr{H}_k^n$, 118
$\mathscr{M}(\mathbb{R}^n)$, 55
$\mathscr{P}_k^n$, 115
$\mathscr{S}$的零元邻域, 74
$\mathscr{S}'$中的Fourier变换, 77
$\mathscr{S}'$中的反射, 77
$\mathscr{S}'$中的平移, 77
$\mathscr{S}'$中的导数, 76
$\mathscr{S}'$中的伸缩, 77
$\mathscr{S}'$中的线性变换, 77
$\mathscr{S}'$中的乘积, 77
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, 73
$\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$中的卷积, 74
$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$上的距离, 67
$B(r)$, 3
$B(x,r)$, 3, 88
BMO空间, 36, 168
$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, 59, 66, 71
$C_0(\mathbb{R}^n)$, 2, 37, 55
k阶齐次多项式, 115
$L\log^+ L(\mathbb{S}^{n-1})$, 174
L^∞-Dini 条件, 184
L^∞连续模, 184
$L_c^p(\mathbb{R}^n)$, 70
L^q-Dini条件, 189
L^q积分连续模, 189
p次 Lebesgue点, 14
$Q(x,r)$, 4
$Z_{x'}^{(k)}$, 121

Abel平均, 44

Banch-Alaoglu定理, 107
Bessel函数, 54, 133
Birkhoff-Khinchin点态遍历定理, 21
Bochner-Riesz平均, 46

Calderón-Zygmund分解, 186

Calderón-Zygmund核, 176, 182, 193
Calderón-Zygmund分解, 147, 148, 150, 155, 164, 178
Calderón-Zygmund奇异积分算子, 170
Calderón-Zygmund旋转方法, 161, 162, 190
Cauchy型积分, 140
Cauchy型积分的非切向边界值, 143
Cotlar不等式, 156, 185
Cotlar等式, 146

Dirac测度, 56, 65, 76, 78

Fatou定理, 107, 108
Fourier-Haar系数c_{jk}, 202
Fourier-Stieltjies变换, 56
Fourier变换, 37
Fourier变换的反演, 45
Fourier变换的特征函数, 64, 135
Fourier变换的特征值, 61, 135
Fourier积分, 42

Gauss-Weierstrass核, 25, 43, 65
Gauss-Weierstrass积分, 26, 28, 44
Gaussian小波, 195
Gauss平均, 44
Green公式, 89

Hömander条件, 175, 189
Haar小波, 221
Haar尺度函数, 205, 221
Haar级数, 203
Haar函数, 194
Haar函数系, 202
Hardy-Littlewood极大函数, 3, 30
Hardy-Littlewood极大算子, 5, 12, 18, 19, 27, 29, 142, 154, 185, 187
Harnack不等式, 95
Hausdorff-Young 不等式, 51
Heisenberg 不等式, 59
Hermite函数系, 61, 62
Hermite算子, 61
Hermite算子的特征函数, 62
Hermite算子的特征值, 62, 63
Hermite算子的谱, 61
Hilbert变换, 142, 156, 165, 169, 170
Hilbert变换的反演公式, 146, 152

Laplace-Beltrami算子, 128
Laplace-Beltrami算子的特征子空间, 128
Laplace-Beltrami算子的特征函数, 128
Laplace-Beltrami算子的谱, 127
Laplace方程, 88
Laplace算子, 61, 88, 117, 128, 139, 147, 158, 165, 169
Lebesgue点, 12, 30, 141, 142, 165
Lebesgue点集, 12, 14
Lebesgue微分定理, 12, 14, 110, 148, 209
Liouville定理, 90, 91
Lusin猜测, 209

Marcinkiewicz算子内插定理, 16, 31, 35, 151, 180
Meyer小波, 222

Parseval等式（Fourier-Stieltjies变换）, 57

Parseval等式（Fourier变换）, 49, 71
Parseval等式（小波变换）, 195
Phragmen-Lindelöf三线定理, 32, 35
Plancherel公式, 65
Plancherel定理, 48, 50, 144, 159, 177, 196
Poisson方程, 165, 170
Poisson核, 25, 43, 65, 88, 103, 141, 149, 153, 165
Poisson积分, 26, 28, 29, 44, 103, 105, 108, 141, 153, 165

Riemann-Lebesgue引理, 37, 57
Riesz–Thörin算子内插定理, 31, 35
Riesz系, 207
Riesz表示定理, 55
Riesz变换, 156, 157, 170, 185

Schwartz速降函数空间$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, 66, 87
Shennon小波, 222
Shennon尺度函数, 222
Sobolev范数, 198
Stein-Weiss变测度算子内插定理, 35

Urysohn引理, 3

Vitali型覆盖引理, 6
von Neumann平均遍历定理, 21

Wiener控制遍历定理, 21

Young不等式, 1, 2

二进小波, 198
二进小波变换, 198
二进方体, 148
二进投影算子, 203

小波方程, 219
小波框架, 200
小波滤子, 219
广义Cauchy-Riemann方程, 166
广义函数, 72

区域, 88
反射, 42, 146
分布, 72
分布函数, 8, 19
方向Hardy-Littlewood极大算子, 162
方向Hilbert变换, 162, 164, 190
方向极大Hilbert变换, 162
尺寸条件, 170
尺度方程, 212, 213
尺度函数, 211
尺度滤子, 212

正交小波, 202
本征子空间, 105, 151, 166
可测集的密点, 110
可换代数, 66
平移τ_h, 39, 146, 159
平移可交换算子, 79
生成算子, 61
主值广义函数, 143, 157, 171
加权空间的范数, 35
对称差, 5, 91, 178

共轭Poisson核, 141, 149, 153, 165
共轭Poisson积分, 141, 153, 156, 165, 166
共轭算子, 144

有界平均振动空间, 169
全变差范数, 55
多尺度分析 (MRA) , 211
次线性算子, 5
交换Banach代数, 1

极大Hilbert变换, 154
极大Riesz变换, 164, 188
极大奇异积分算子, 185, 190
极化恒等式, 200
酉算子, 48, 146
连续小波变换, 195
连续小波变换的反演公式, 197
伸缩η_a, 39, 146, 159, 183
局部Fatou定理, 109

转置算子, 144
非切向有界, 109, 139
非切向极大函数, 29, 166
非切向极限, 29, 108, 139, 141
径向延拓, 127
径向极大函数, 28, 166
径向函数, 25
卷积, 1
单位球体积v_n, 12, 24, 65, 91, 95
单位球面面积ω_{n-1}, 24, 25, 89
实Hardy空间, 36, 168
实解析函数, 139
经典Calderón-Zygmund奇异积分算子, 176, 190

按L^p范数可导, 40
带齐型核的奇异积分算子, 183
带奇核的奇异积分算子, 175
带调和函数, 121
带偶核的奇异积分算子, 175
带粗糙核的极大算子, 163
带粗糙核的奇异积分算子, 190
标准正交系, 207
测度Fourier-Stieltjies积分的Abel平均, 58
测度的Fourier-Stieltjies积分, 58
测度的Hardy-Littlewood极大函数, 65
测度的Poisson-Stieltjies积分, 56, 103, 105
测度的卷积, 56
恒等逼近, 22
恒等逼近算子, 22

框架, 199
紧框架, 199
乘法公式, 41, 49, 57, 173
积分连续模, 47
递减径向控制函数, 25, 28, 142, 166
消失条件, 170
容许条件, 194, 201
调和函数, 88
调和函数的反射原理, 101
调和函数的球体均值特征, 94
调和函数的球面均值性质, 89
调和函数的球面均值特征, 93
调和函数的最大值原理, 90
调和函数的最小值原理, 139
调和振子, 61
弱(p,p)型算子, 16
弱(p,q)型算子, 6, 10
弱(1,1)型算子, 7, 149, 154, 163, 164, 176, 185, 190–192
弱(p,q)有界, 6

球体调和函数, 118
球调和函数, 118
基本小波, 194

遍历定理, 15
遍历算子族, 18
强极大算子 M_s^+, 15
强极大算子 M_s, 14, 15, 36
缓增L^p函数, 73
缓增广义函数, 73
缓增分布, 73
缓增函数, 75

零化算子, 61
零阶齐次条件, 170

稳定性条件, 198
算子族的收敛性, 10, 15
算子族的极大算子, 10, 16, 18

墨西哥帽小波, 195